

Comparación de cuatro métodos de análisis de señal no estacionaria: “STFT”, la distribución de Wigner-Ville, la transformada de “Wavelet” continua y el análisis de Multiresolución

J. Romero y S. Cerdá

Laboratorio de Acústica. Departamento de Física Aplicada. Facultad de Ciencias Físicas. Universidad de Valencia

INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo es la comparación de los métodos más usuales de análisis de señal no estacionaria. El método más conocido es el “Short-Time Fourier Transform” (STFT). El STFT utiliza ventanas temporales para localizar el análisis espectral en un intervalo concreto de la señal.

Un método de origen anterior a la utilización del STFT, pero cuya aplicación como método de análisis de señal no estacionaria es más tardío, es la distribución de Wigner-Ville (WVD). En este caso, no se utilizan ventanas temporales. Define la autocorrelación dependiente del tiempo.

En los años 80, la transformada de “wavelet” (WT), se introdujo como métodos de análisis de señal no estacionaria, para mejorar el STFT. Desde este punto de vista, es una generalización del STFT. Sin embargo, el estudio de algoritmos rápidos para calcular la transformada de “wavelet”, trajo consigo la introducción de los análisis de Multiresolución (MRA). Este tipo de análisis abrió un campo amplio de investigación no solo en el análisis de señal no estacionaria, también en la matemática pura y en el terreno de la aproximación numérica.

SHORT-TIME FOURIER TRANSFORM

El STFT se define como

$$ST(f)(w, b) = \int_{\mathbb{R}} f(t) g(t-b) e^{-iwt} dt \quad (1)$$

La función $g(t)$ es la denominada función ventana de análisis. Debe satisfacer las relaciones:

$$\int_{\mathbb{R}} |w G(w)|^2 dw < \infty \quad (2)$$

$$\int_{\mathbb{R}} |t g(t)|^2 dt < \infty \quad (3)$$

El parámetro b sitúa la ventana temporal en la posición $t = b$ dentro de la duración de la señal. $ST(f)(w, b)$ se interpreta como la contribución que tiene la señal en el instante b para la frecuencia w . La representación de $ST(f)(w, b)$, se realiza en el dominio tiempo-frecuencia (son los denominados espectrogramas).

DISTRIBUCIÓN DE WIGNER-VILLE

La WVD se define como (Yen 1987):

$$W(t, w) = \int_{\mathbb{R}} z(t + y/2) z^*(t - y/2) e^{-iwy} dy \quad (4)$$

siendo $z(t)$ la señal analítica asociada a la señal. Es decir:

$$z(t) = f(t) + i H(f(t)) \quad (5)$$

siendo $H(f(t))$ la transformada de Hilbert de $f(t)$.

Si denotamos:

$$h_t(y) = z(t + y/2) z^*(t - y/2) \quad (6)$$

a esta función se le denomina t-autocorrelación. Siendo su interpretación similar a la autocorrelación pero dando información localizada en el instante t.

Como la transformada de Fourier de la autocorrelación proporciona el módulo de la transformada de Fourier de la señal, la distribución de Wigner-Ville se interpreta como el módulo de la contribución para una frecuencia w en un instante t de la señal. (Nótese que la distribución de Wigner-Ville es real).

LA TRANSFORMADA DE "WAVELET".

La WT se define como (I. Daubechies 1992):

$$WT(f)(a, b) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi(t - b/a) dt \quad (7)$$

donde la función ψ satisface:

$$\int_{\mathbb{R}} |t \psi(t)|^2 dt < \infty \quad (8)$$

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(w)|^2 / |w| dt < \infty \quad (9)$$

Estas condiciones implican la siguiente relación:

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0 \quad (10)$$

La relación (10) implica que el área que encierra la función ψ es cero. Como estas funciones se toman de forma tal que sirvan para localizar temporalmente el análisis, la relación anterior explica el nombre de "wavelet" (es decir, onda pequeña).

Comparando la expresión (1) con la (7), la WT es una generalización de la STFT. Si denotamos:

$$G(w, b) = g(t-b) e^{-iwt} \quad (11)$$

$$\psi(a, b) = \psi(t - b/a) \quad (12)$$

la STFT y la WT se expresan como :

$$ST(f)(w, b) = \int_{\mathbb{R}} f(t) G(w, b) dt \quad (13)$$

$$WT(f)(a, b) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi(a, b) dt \quad (14)$$

Es decir son semejantes en forma. Como vemos en la WT se sustituye la frecuencia w por un parámetro a , denominado parámetro de dilataciones o de escala. Se tiene que existe una proporcionalidad inversa entre dicho parámetro y la frecuencia. Es decir:

$$a \propto 1/w \quad (15)$$

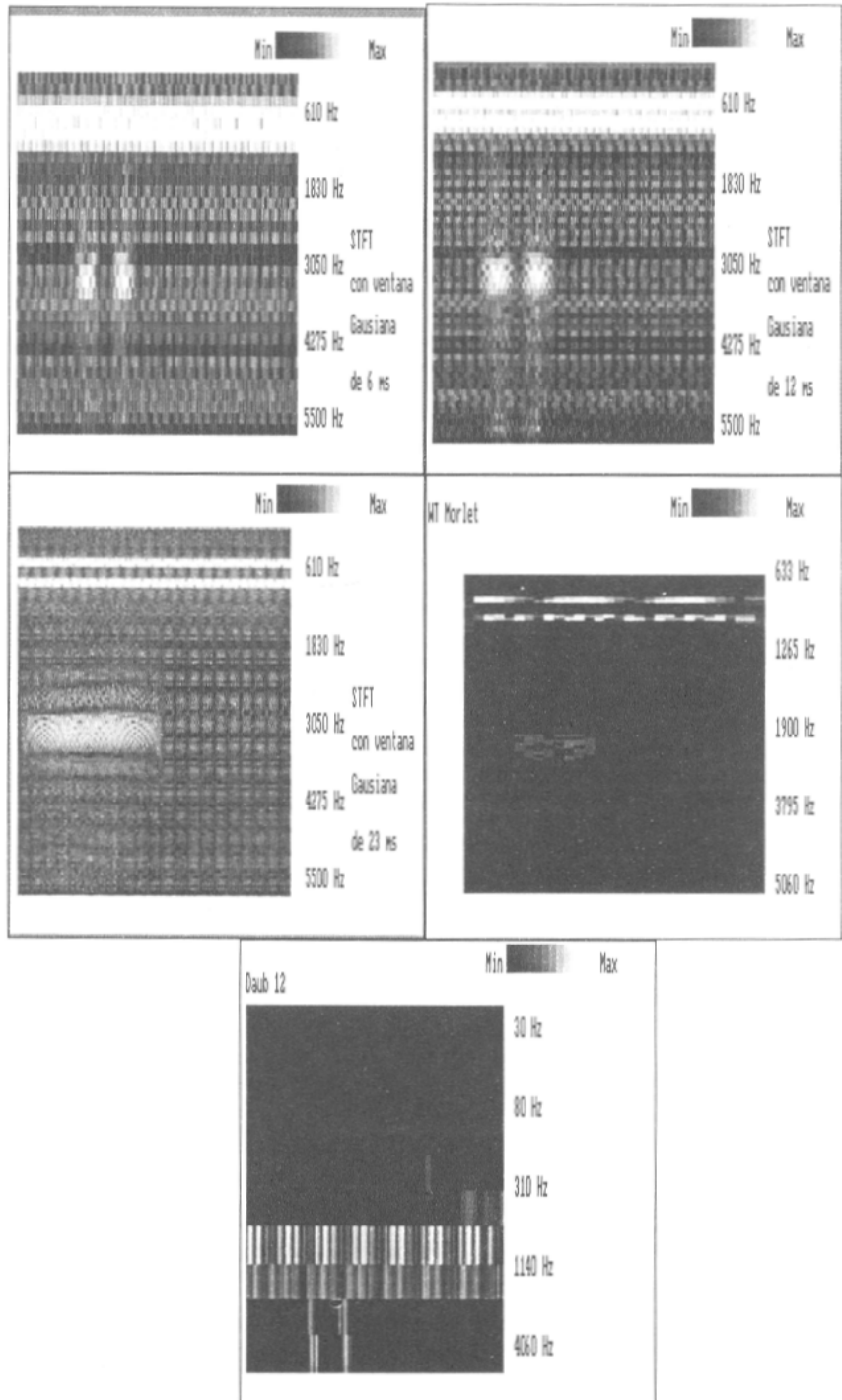
Esto permite de nuevo interpretar $WT(f)(a, b)$, mediante el uso de la identidad de Parseval, como la contribución en la frecuencia $1/a$ en el instante b de la señal $f(t)$.

ANÁLISIS DE MULTIRESOLUCIÓN.

A la hora de calcular WT, los parámetro a y b se discretizan. Cuando se toma $a = 2^j$ y $b = k 2^j$, existen algoritmos rápidos de cálculo que se denominan algoritmos de Multiresolución. Estos algoritmos implican la existencia de funciones escala. Estas satisfacen las relaciones:

$$\psi(x) = \sum_k q_k \phi(2x - k) \quad (16)$$

$$\phi(x) = \sum_k p_k \phi(2x - k) \quad (17)$$



Estas relaciones posibilitan reglas de recurrencia para calcular los coeficientes $WT(f) (2^j, k 2^j)$. El desarrollo de estos algoritmos se puede encontrar en Chui (1992).

COMPARACIÓN MÉTODOS

Los algoritmos utilizados para comparar estos métodos se han realizado en Lenguaje C, y preparados para funcionar con formato de archivo .WAV y .VOC.

La STFT es quizás el método más conocido de los presentados en este trabajo. El problema que plantea es la elección del tamaño de la ventana de análisis. Cuando tengamos señales en las que aparezcan variaciones bruscas del espectro y queramos tener buena precisión en frecuencias la STFT tiene problemas. Los gráficos que presentamos a continuación muestran estos problemas. El ejemplo es una señal con dos frecuencias de 400 y 800 Hz respectivamente en la que se introducen dos pequeños intervalos con una frecuencia de 3000 Hz. Vemos que con ventanas de análisis pequeñas los intervalos se aprecian perfectamente pero las frecuencias de 400 y 900 Hz no se consiguen apreciar. Si tomamos una ventana de análisis grande, entonces se aprecian las dos frecuencias de 400 y 900 Hz pero no los dos intervalos de 3000 Hz.

La WT permite apreciar ambas cosas al utilizar una ventana de análisis diferente según la frecuencia que esté analizando. Para frecuencias bajas utiliza una ventana ancha; y para frecuencias altas una ventana más estrecha.

Se presenta también el resultado del MRA con coeficientes Daubechies-12. Como vemos corresponde a un análisis en banda ancha. Se distinguen los dos intervalos, pero al ser análisis de banda ancha no muestra separación entre las frecuencias de 400 y 900 Hz al estar en dos bandas consecutivas.

BIBLIOGRAFÍA

C.K.CHUI. *An introduction to wavelets*. Academic Press 1992

I. DAUBECHIES T en *Lectures on wavelets*. Siam 1992

N.YEN *Time and frequency representation of acoustic signals* J.Acoust Soc. Am. June 1987

S.CERDÁ Y J. ROMERO *Tratamiento mediante distintos tipos de Wavelets a cuatro señales*. Revista de Acústica (Sociedad Española de Acústica), vol XXVI (3,4)1995.