

## **ONDAS DE LAMB EN PLACAS SANDWICH. UNA FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS.**

REFERENCIA PACS: 43.35.Cg

Autores: Galán Fernández, José Manuel; Abascal García, Ramón  
Institución: Grupo de Estructuras, Escuela Superior de Ingenieros de Sevilla.  
Dirección: Camino de los Descubrimientos, s/n. E41092  
Población: Sevilla  
País: España  
Tel: 954 487293  
Fax: 954 487295  
E-mail: mfernán@cica.es

### **ABSTRACT**

A Finite Element formulation to model Lamb wave scattering in homogeneous and sandwich plates is presented. Dispersion curves are calculated by solving a quadratic eigenproblem. A meshing criterion to obtain accurate results with linear and quadratic elements is provided. An absorbing boundary condition for semi-infinite plates is derived and applied to study Lamb wave reflection at the edge of a semi-infinite plate.

### **RESUMEN**

En los últimos años se ha desarrollado un creciente interés en las aplicaciones de las ondas elásticas guiadas en ensayos no destructivos (END) [1,2]. Este trabajo se centra en el análisis numérico de ondas guiadas en placas (denominadas ondas de Lamb). Dado que la propagación de ondas de Lamb es dispersiva, el primer paso hacia un adecuado modelo numérico es el cálculo preciso de las curvas de dispersión. Desde el punto de vista de END es además fundamental modelar adecuadamente la interacción de dichas ondas con obstáculos y defectos (bordes libres, delaminaciones, grietas...). Este problema sólo puede estudiarse numéricamente debido a la compleja interacción entre modos que se produce.

Los autores han aplicado una formulación de Elementos Finitos (EF) para estudiar la propagación de ondas de Lamb en placas [3]. Esta formulación proporciona dos características principales: (1) las curvas de dispersión pueden aproximarse resolviendo un problema cuadrático de autovalores; y (2) la matriz de rigidez dinámica de la placa semi-infinita representa una condición de contorno absorbente para las ondas de Lamb. Una serie de problemas de prueba se han empleado para comprobar la formulación. Como resultado de un análisis de error, se propone un criterio de mallado que garantiza una precisión aceptable.

La potencia del método empleado frente a otros alternativos se centra en su versatilidad y flexibilidad, ya que puede aplicarse directamente a problemas de placas sandwich. Como muestra, se ha considerado el problema de la unión por difusión de dos placas de aluminio, el cual aparece en ciertas aplicaciones aeronáuticas y aeroespaciales [4].

### **ONDAS DE LAMB ARMÓNICAS Y PLANAS**

Las ondas de Lamb aparecen en sólidos donde las ondas S y P son guiadas entre dos superficies paralelas. La interferencia entre las múltiples reflexiones produce ondas que se propagan paralelamente a las superficies. Los diferentes patrones de interferencia dan lugar a un número infinito de modos de Lamb, cada uno con un perfil de desplazamientos según el espesor. La velocidad de propagación depende del producto de la frecuencia por el espesor de la placa, por lo cual estas ondas son dispersivas.

El estudio de ondas planas en placas homogéneas isótropas infinitas fue iniciado por Lamb [5]. Un estudio

teórico muy detallado se encuentra en [6,7]. Los modos se clasifican en dos tipos: (1) simétricos o longitudinales, cuyo desplazamiento medio en el espesor va según la dirección de propagación, y (2) antisimétricos o flexurales, cuyo desplazamiento medio tiene una dirección perpendicular a la placa. La frecuencia angular  $\omega$  y el número de onda  $k$  (o la velocidad de fase) están relacionadas a través de las denominadas ecuaciones de Rayleigh-Lamb. Para una frecuencia dada, estas ecuaciones trascendentes admiten un número finito de raíces reales, correspondientes a modos que se propagan, y un número infinito de raíces complejas o puramente imaginarias, correspondientes a modos evanescentes cuya amplitud decae exponencialmente con la distancia.

Para cada modo, las ecuaciones de Rayleigh-Lamb proporcionan una relación entre  $\omega$  y  $k$  que, representada en los ejes  $\text{Re}(k) - \text{Im}(k) - \omega$  es una curva denominada rama. Se observa que dicho modo no se propaga para todas las frecuencias (excepto el primer modo simétrico y antisimétrico), sino solo para valores superiores a su frecuencia de corte. Representando las ramas de todos los modos se obtienen las curvas de dispersión, las cuales dependen únicamente del coeficiente de Poisson del material  $\nu$ .

### FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS PARA ONDAS DE LAMB

La matriz de rigidez de un elemento que modele una capa delgada y homogénea de espesor constante puede escribirse como una función explícita del número de onda  $k$  [3]

$$\mathbf{K}^e = k^2 \mathbf{A}^e + ik \mathbf{B}^e + \mathbf{G}^e \quad (1)$$

donde las matrices  $\mathbf{A}^e, \mathbf{G}^e$  son simétricas y  $\mathbf{B}^e$  es antisimétrica. Las expresiones de estas matrices elementales para elementos lineales y cuadráticos pueden encontrarse en [3,8].

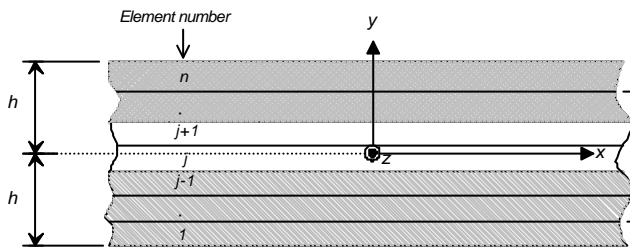


Figura 1. Geometría de una placa sandwich de espesor  $2h$ .  
Discretización de EF.

Las matrices de rigidez y de masa globales de una placa sandwich (ver Figura 1) se obtienen a partir de las elementales mediante el proceso de montaje habitual en EF [9]

$$(k^2 \mathbf{A} + ik \mathbf{B} + \mathbf{G} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (2)$$

donde  $\mathbf{d}$  y  $\mathbf{f}$  son los vectores de desplazamientos y fuerzas nodales respectivamente. En el caso de ondas de Lamb, las dos superficies de la placa están libres de tracciones, por lo que  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ .

Si se considera una frecuencia fija, la ecuación (2) se transforma en un problema de autovalores cuadráticos cuyas soluciones son los números de onda de los distintos modos

$$(k^2 \mathbf{A} + ik \mathbf{B} + \mathbf{C}) \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (3)$$

donde  $\mathbf{C} = \mathbf{G} - \omega^2 \mathbf{M}$  es una matriz conocida. Debido a la especial estructura de las matrices globales  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , este problema se puede reescribir como un problema lineal de autovalores con el mismo número de grados de libertad (g.d.l.) [8].

Si se considera un número de onda fijo, la ecuación (2) se convierte en un problema de autovalores lineal cuyas soluciones son las frecuencias para los distintos modos

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (4)$$

donde  $\mathbf{K} = k^2 \mathbf{A} + ik \mathbf{B} + \mathbf{G}$  es una matriz conocida.

### CÁLCULO NUMÉRICO DE CURVAS DE DISPERSIÓN

La formulación de EF presentada permite calcular las curvas de dispersión de ondas de Lamb de una manera sencilla como solución de un problema de autovalores. Hay dos formas de hacerlo:

- Barrido en frecuencias: fijada una frecuencia, se calculan los autovalores de la ecuación (3), lo cual equivale a obtener la sección de las curvas de dispersión por un plano  $\omega = cte \in \mathbb{V}$ . Se obtienen autovalores reales, imaginarios puros y complejos, correspondientes a los diferentes modos de Lamb. Las curvas de dispersión se obtienen repitiendo el proceso para muchas frecuencias  $\omega$ .
- Barrido en nº onda: fijado un número de onda, se calculan los autovalores de la ecuación (4), lo cual equivale a obtener la sección de las curvas de dispersión por un plano  $k = cte \in \mathbb{R}$ . Se obtienen autovalores reales, imaginarios puros y complejos, de los cuales son válidos únicamente los reales puesto

que la frecuencia debe ser real. Un autovalor complejo revela que el modo correspondientes no puede tener ese nº onda para ninguna frecuencia. Las curvas de dispersión se obtienen repitiendo el proceso para muchos valores de  $k$ .

En este artículo las curvas de dispersión se calculan mediante este último procedimiento. El cálculo de autovalores se lleva a cabo mediante subrutinas IMSL. Por claridad sólo se representan las porciones de las curvas de dispersión correspondientes a números de onda reales o imaginarios puros.

### Placa Homogénea e Isótropa

Las curvas de dispersión para ondas de Lamb en placas homogéneas e isotrópicas fueron calculadas por Mindlin y otros autores en la década de los 50 [6,7] mediante la búsqueda numérica de las raíces de la ecuación de Rayleigh-Lamb. Aunque las curvas de dispersión adimensionales dependen únicamente de  $\nu$ , el cálculo numérico exige definir completamente el material y las dimensiones de la placa. Se ha considerado un espesor  $2h=2mm$ , una densidad  $\rho=1kg/dm^3$ , unas velocidades de onda longitudinal  $c_L=1km/s$  y transversal  $c_T=0.57735km/s$ , y un coeficiente de Poisson  $\nu=0.25$ .

Los resultados numéricos con mallas uniformes de EF de elementos lineales y cuadráticos, con tres tamaños de elementos diferentes progresivamente reducidos por un factor 2, se muestran en las Figuras 2 a 4 comparados con los resultados exactos. Las ramas correspondientes a modos simétricos se dibujan con línea delgada continua, las ramas de modos antisimétricos con línea delgada discontinua, los resultados de elementos lineales con círculos y los resultados con mallas cuadráticas con cruces. En cada figura se muestran resultados de EF con mallas de elementos lineales y cuadráticos con el mismo número de g.d.l.

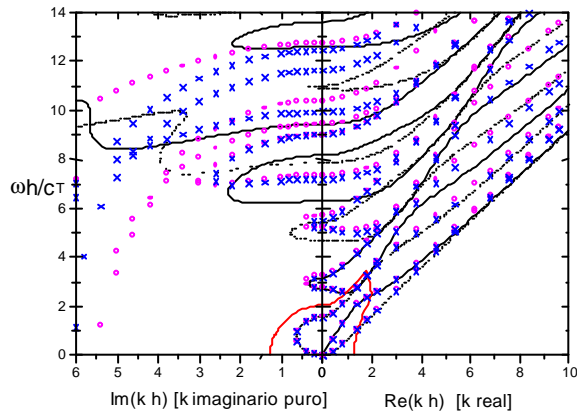


Figura 2. Curvas de dispersión con 12 elementos lineales y 6 elementos cuadráticos.

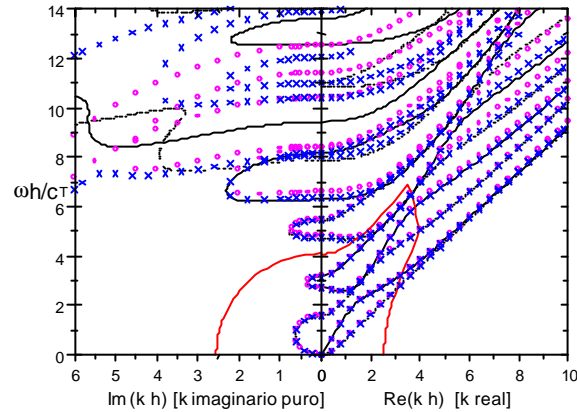


Figura 3. Curvas de dispersión con 24 elementos lineales y 12 elementos cuadráticos.

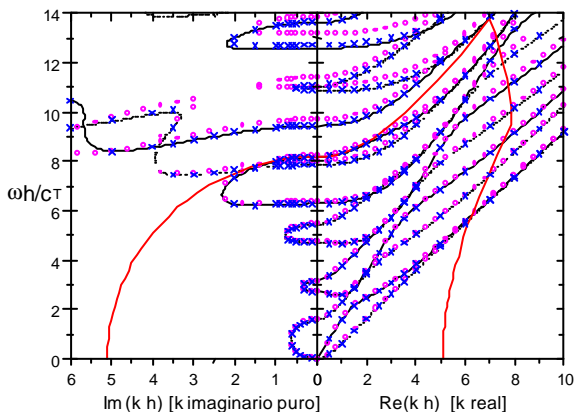


Figura 4. Curvas de dispersión con 48 elementos lineales y 24 elementos cuadráticos

Es fundamental definir los límites de validez de los resultados numéricos generados con esta formulación. Para ello se ha llevado a cabo un estudio del error de la matriz de rigidez elemental de EF frente a la matriz de rigidez exacta para una capa de espesor  $L$ . La expresión de la matriz de rigidez exacta se obtiene a partir de las expresiones analíticas de desplazamientos y tensiones soluciones del problema [7]. Mediante el programa Mathematica 3.0 se ha determinado la región en el espacio  $Re(k) - Im(k) - \omega$  en la cual dicho error es inferior al 5%. Dicha región es un volumen cerrado que contiene al origen (en el cual el error es nulo). En las Figuras 2 a 4 se ha dibujado con una línea gruesa su contorno exterior. Puede observarse que en dicha región no solamente las matrices de rigidez elementales están bien representadas, sino también las curvas de dispersión (es decir, los autovalores de la matriz de rigidez global).

A partir del análisis del error realizado anteriormente, se propone el siguiente criterio de mallado:  $I_T / L > a$ , donde  $L$  es el tamaño del elemento,  $I_T = 2pc_T / \omega$  es la longitud de onda de las ondas transversales,  $a=10$  para elementos lineales y  $a=4$  para elementos cuadráticos. Este criterio tiene una clara interpretación física: para reproducir con un error pequeño las curvas de dispersión mediante EF, es necesario

utilizar más de  $a$  elementos por longitud de onda transversal. El criterio de mallado tiene una segunda condición que se aplica para  $n^o$  onda complejos:  $Abs(k)L < 0.425$ .

Este criterio de mallado coincide con la regla de buena práctica para mallas de EF en Dinámica. Un problema de autovalores similar al descrito aparece en el cálculo de frecuencias naturales con EF [9]. Se sabe que las frecuencias naturales más bajas se obtienen con mayor precisión que las más altas. Este progresivo decremento en precisión para armónicos superiores es debido a que sus correspondientes modos son cada vez más complejos, con más picos y valles, requiriendo más elementos para ser adecuadamente representados. Las mallas de EF son más rígidas que las estructuras reales, proporcionando frecuencias naturales más altas que las reales. Este fenómeno también puede observarse en el cálculo de las curvas de dispersión.

**Unión por difusión de placas de Titanio (Ti)**

Este tipo de unión se utiliza en componentes aeronáuticos. La delgada interfase de unión por difusión puede considerarse como un capa de un material diferente al Titanio (Ti), lo cual permite modelar la calidad de la unión [2]. Se han calculado con EF las curvas de dispersión de la unión por difusión de dos placas de Ti iguales en los siguientes casos: (1) unión perfecta, modelada como una placa de Ti homogénea, y (2) una unión de mala calidad, modelada con una capa de unión de peores propiedades que el Ti. Los resultados numéricos con EF usando 27 elementos cuadráticos se muestran en la Figura 5, comparándose con los

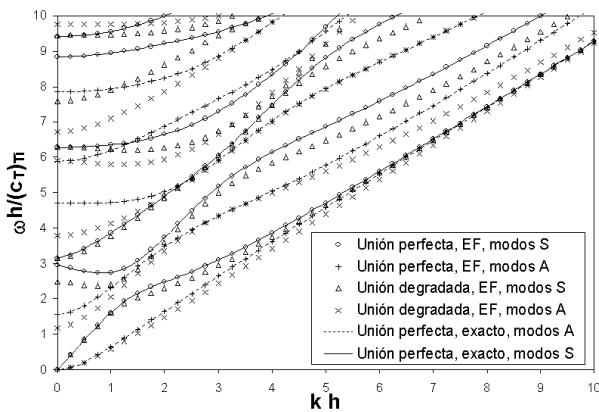


Figura 5. Curvas de dispersión de la unión por difusión

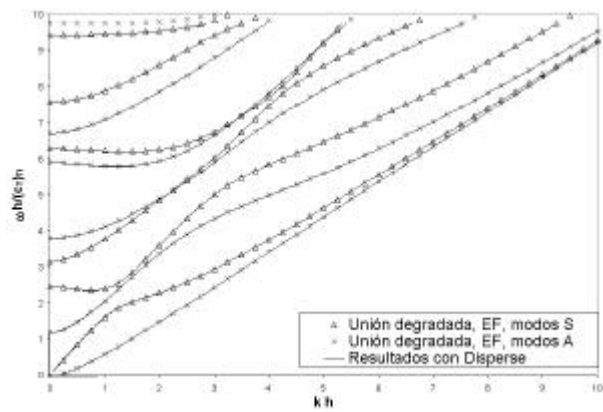


Figura 6. Curvas de dispersión para unión por difusión imperfecta. Comparación con Disperse.

resultados exactos para el caso de unión perfecta. El criterio de mallado indica que los resultados de EF son válidos para frecuencias  $\omega h / (c_T)_{Ti} < 15.8$ . Las propiedades de los materiales y la geometría empleados son: espesor total  $2.01mm$ ; espesor de la capa de unión  $0.01mm$ ; propiedades del Ti:  $\rho = 4.46kg/dm^3$ ,  $c_L = 6.06km/s$ ,  $c_T = 3.23km/s$ ; propiedades degradadas para la capa de unión imperfecta:  $\rho = 2.2kg/dm^3$ ,  $c_L = 1.35km/s$ ,  $c_T = 0.55km/s$ . Puede comprobarse el desplazamiento hacia la derecha de las curvas de dispersión para el caso de unión imperfecta respecto al caso de unión perfecta, lo cual coincide con las observaciones experimentales [2]. Las curvas de dispersión obtenidas para el caso de unión imperfecta se han comparado en la Figura 6 con las proporcionadas por Disperse [13], un programa comercial para generar curvas de dispersión por un método alternativo ('Global Matrix method'[2,13]), obteniéndose una coincidencia total con ellas.

**CONDICIÓN DE CONTORNO ABSORBENTE PARA ONDAS DE LAMB**

Consideremos una placa semi-infinita de espesor  $2h$  que se extiende en el rango  $(-\infty, x_0]$ , como se muestra en la Figura 7, con las superficies  $y = \pm h$  libres de tracciones. El campo reflejado por el borde puede expresarse como una superposición de modos de Lamb (expansión en modos normales [10,11,12]), en la cual sólo se incluyen modos que verifiquen la condición de radiación: modos no evanescentes que se propaguen hacia  $x = -\infty$  o modos evanescentes que decaigan cuando  $x \rightarrow -\infty$ . Teniendo en cuenta que la dependencia con  $x$  y  $t$  es  $\exp[i(kx + \omega t)]$ , dichos modos han de tener  $k$  reales y positivos, o  $k$  complejos y con parte imaginaria negativa, respectivamente.

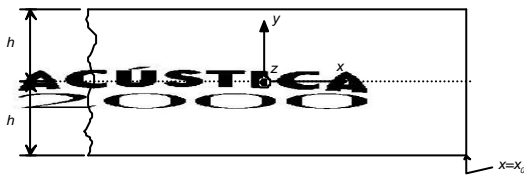


Figura 7. Geometría de la placa semi-infinita

Dada una frecuencia  $\omega$  fija, la formulación de EF descrita proporciona una buena aproximación de los modos de Lamb como solución del problema cuadrático de autovalores de la

Ecuación (3). Una malla de  $N$  nodos produce  $4N$  autovalores  $k_a$  y sus correspondientes autovectores  $\mathbf{f}^{(a)}$ , de los cuales sólo  $2N$  verifican la condición de radiación. En la sección  $x=x_0$  utilizamos estos  $2N$  modos para expandir el campo elastodinámico en modos normales. Los desplazamientos se pueden escribir como

$$\mathbf{u}^{refl} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{(1)} & \dots & \mathbf{f}^{(2N)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \exp(ik_1 x_0) \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{(2N)} \exp(ik_{2N} x_0) \end{bmatrix} \exp(i\omega t) = \mathbf{\ddot{O}} \mathbf{\hat{a}} \exp(i\omega t) \quad (5)$$

donde  $\mathbf{\ddot{O}}$  es una matriz cuyas columnas son los autovectores y  $\mathbf{\hat{a}}$  es un vector que contiene los coeficientes de participación de los modos. Para las fuerzas nodales consistentes se tiene

$$\mathbf{F}^{refl} = \begin{bmatrix} \mathbf{j}^{(1)} & \dots & \mathbf{j}^{(2N)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \exp(ik_1 x_0) \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{(2N)} \exp(ik_{2N} x_0) \end{bmatrix} \exp(i\omega t) = \mathbf{\Theta} \mathbf{\hat{a}} \exp(i\omega t) \quad (6)$$

donde  $\mathbf{\Theta}$  es una matriz cuyas columnas son los vectores  $\mathbf{j}^{(a)}$ , los cuales son las fuerzas nodales consistentes sobre el borde  $x=x_0$  asociadas al modo  $\mathbf{a}$ . Despejando el vector de coeficientes  $\mathbf{\hat{a}}$  de la Ecuación (5), y sustituyendo en la Ecuación (6) se obtiene una relación entre desplazamientos y fuerzas nodales en  $x=x_0$

$$\mathbf{F}^{refl} = \mathbf{\Theta} \mathbf{\ddot{O}}^{-1} \mathbf{u}^{refl} = \mathbf{S} \mathbf{u}^{refl} \quad (7)$$

donde  $\mathbf{S}$  es la matriz de rigidez dinámica de la placa semi-infinita, que como puede observarse no depende de la posición  $x_0$ .

Una onda de Lamb podría originarse en la placa semi-infinita debido a alguna excitación no incluida en este modelo, y propagarse hacia el borde  $x=x_0$ . El principio de superposición puede aplicarse expresando el campo total como suma de una onda incidente y una onda reflejada:  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^I + \mathbf{u}^{refl}$ ,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^I + \mathbf{F}^{refl}$ , donde el campo incidente es conocido. Sustituyendo en la Ecuación (7), se obtiene una relación desplazamientos y fuerzas nodales totales

$$\mathbf{F} - \mathbf{F}^I = \mathbf{S} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^I) \quad (8)$$

En este trabajo se han considerado como ondas incidentes ondas de Lamb planas compuestas por un único modo. Si la fuente de excitación que las genera está lejos de la sección  $x=x_0$ , los modos evanescentes generados tendrán una amplitud nula cuando lleguen al borde puesto que su amplitud decae exponencialmente con la distancia a la fuente. Las únicas ondas de Lamb que llegan al borde son modos no evanescentes.

## REFLEXIÓN DE ONDAS DE LAMB EN EL BORDE DE UNA PLACA SEMI-INFINITA HOMOGÉNEA

La reflexión del modo S0 en el borde de una placa semi-infinita homogénea ha sido resuelto para bordes libres [10,11,12] y para bordes empotrados [12]. Estos resultados, obtenidos para un material con coeficiente de Poisson  $\nu = 0.25$ , se han reproducido mediante la formulación de EF presentada usando mallas uniformes. Para completar la definición del material necesaria en el cálculo numérico, se ha considerado un espesor de placa  $2h=2mm$ , una densidad  $\rho = 1kg/dm^3$  y unas velocidades de onda  $c_L=1km/s$  y  $c_T=0.57735km/s$ .

El criterio de mallado propuesto se ha empleado para determinar el  $n^o$  mínimo  $n_{min}$  de elementos necesario para reproducir adecuadamente los resultados en [12] hasta la máxima frecuencia considerada. Los resultados de EF, obtenidos con mallas con  $n > n_{min}$  elementos cuadráticos, se muestran en las Figuras 8 y 9, observándose un excelente acuerdo con [12]. Dado que el borde es simétrico, no puede existir una conversión entre modos simétricos y antisimétricos, lo cual es reproducido exactamente por los resultados numéricos. La conservación de la energía exige que el flujo de energía incidente sea igual al flujo de energía reflejado, lo cual es una medida de la precisión de los resultados numéricos. Los resultados mostrados cumplen la conservación de energía con un margen inferior al 1%.

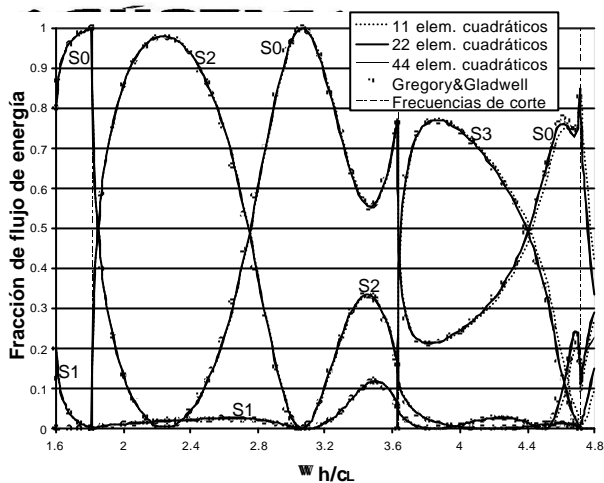


Figura 8. Reflexión del modo S0 en un borde libre.

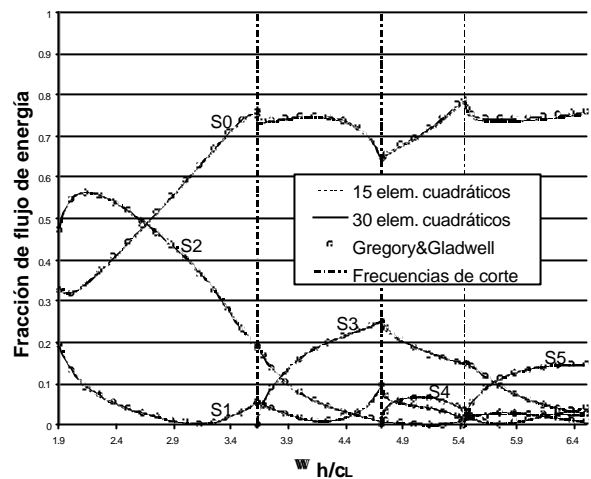


Figura 9. Reflexión del modo S0 en un borde

## CONCLUSIONES

Se ha presentado una formulación de Elementos Finitos para estudiar ondas de Lamb en placas sandwich, capaz de resolver dos problemas teóricos fundamentales para el desarrollo de Ensayos No Destructivos basados en dichas ondas: (1) obtención de sus curvas de dispersión y (2) difracción por obstáculos y defectos. Las curvas de dispersión se calculan de una manera más sencilla y robusta que con otros métodos existentes, mediante la resolución de un problema de autovalores cuadrático. Para comprobar la potencia del método se han resuelto dos problemas, obteniéndose un excelente acuerdo con resultados previos. Mediante la expansión en modos normales, se ha obtenido una condición de contorno absorbente para ondas de Lamb que sirve para estudiar problemas de difracción por defectos. Este contorno se ha empleado para resolver la difracción de dichas ondas en bordes libres y empotrados, obteniéndose unos excelentes resultados. La potencia y versatilidad de la formulación está complementada por un criterio de mallado que acota el error de los resultados. Dicho criterio ha sido propuesto a partir del análisis del error de la matriz de rigidez elemental de Elementos Finitos, y ha sido validado en los ejemplos numéricos descritos.

## REFERENCIAS

- [1] J.L. Rose, K.M. Rajana and F.T. Carr, Ultrasonic guided wave inspection concepts for steam generator tubing, *Materials Evaluation*, 52(2):307-316, 1994.
- [2] J.L. Rose, *Ultrasonic Waves in Solid Media*, Cambridge University Press, 1999.
- [3] G. Waas, *Linear Two-Dimensional Analysis of Soil Dynamic Problems in Semi-Infinite Layer Media*, PhD thesis, University of California, Berkeley, 1972.
- [4] J.L. Rose, W. Zhu and M. Zaidi, Ultrasonic NDT of Titanium Diffusion Bonding with Guided Wave, *Materials Evaluation*, 56(4):535-539, 1998.
- [5] H. Lamb, Waves in an Elastic Plate, *Proc Royal Society London, Ser. A* 93:114-128, 1917.
- [6] I.A. Viktorov, *Rayleigh and Lamb Waves*, Plenum Press, 1967.
- [7] J.D. Achenbach, *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland, 1973.
- [8] E. Kausel, Forced Vibrations of circular foundations on layered media, Technical Report R74-11, Department of Civil Engineering, MIT, 1974.
- [9] O.C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method, Fourth Edition, Vol. 1&2*, McGraw-Hill, 1994.
- [10] D.C. Gazis and R.D. Mindlin, Extensional vibrations and waves in a circular disk and a semi-infinite plate, *Journal of Applied Mechanics*, 27:541-547, 1960.
- [11] P.J. Torvik, Reflection of waves trains in semi-infinite plates, *Journal of the Acoustical Society of America*, 41(2):346-353, 1967.
- [12] R.D. Gregory and I. Gladwell, The reflection of a symmetric Rayleigh-Lamb wave at the fixed or free edge of a plate, *Journal of Elasticity*, 13:185-206, 1983.
- [13] B. Pavlakovic and M. Lowe, *Disperse, An Interactive Program for Generating Dispersion Curves*, Non-Destructive Testing Group, Imperial College, <http://www.me.ic.ac.uk/dynamics/ndt/ndt.html>