



Análisis clásico de la ecuación unidimensional de onda con amortiguamiento viscoso

M. Febbo^a, S. A. Vera^a and P. A. A. Laura^a

^a *Instituto de Mecánica Aplicada, Universidad Nacional del Sur, Av Alem 1253 Bahía Blanca, Argentina, mfebbo@uns.edu.ar*

RESUMEN: En vista de la importancia de un sistema continuo con amortiguamiento, es necesario un conocimiento detallado del mismo si se desea que opere en situaciones dinámicas severas. Este trabajo utiliza la ecuación de onda unidimensional para analizar las vibraciones libres de sistemas con amortiguamiento. La mayoría de los textos usuales contempla sólo la posibilidad de que todas las componentes temporales de la respuesta dinámica del sistema estén sub amortiguadas, pero no incluyen la posibilidad de que algunas de las componentes temporales de más baja frecuencia estén sobre amortiguadas. También se discutirán las implicancias físicas de este situación

ABSTRACT: In view of the importance of a viscously damped continuous system, a detailed knowledge of it is needed when they operate under severe dynamic situations. The present paper uses the classical model of the one dimensional wave equation to analyze free damped vibrations. Well known treatises deal only with the case where all the temporal components of the response are underdamped. This study considers the possibility, and it is certainly a realistic one, where some of the lower temporal components are overdamped. Physical implications of this situation are discussed.

1. INTRODUCCION

El problema de la cuerda vibrante fue el primero que despertó un gran interés dentro de la comunidad científica en problemas de vibraciones de sistemas continuos. Las leyes que rigen las vibraciones de las cuerdas fueron descritas por primera vez por el sacerdote Marin Mersenne (1588-1648) en su obra "Harmonicorum Liber". Posteriormente el primero en deducir la ecuación de la cuerda vibrante considerada como un medio continuo fue Jean-le-Rond D'Alembert en 1756. Un siglo después, en su destacada obra " The Theory of Sound " Lord Rayleigh [1] realiza un tratamiento muy completo de todos los sistemas vibrantes continuos y discretos y por supuesto trata al problema de la cuerda vibrante.

La solución al problema es sencilla y no ofrece mayor dificultad, tanto en el caso en que la cuerda se encuentre libre de disipación como en el caso en que se encuentre sometida a un rozamiento del tipo viscoso en donde existe una disipación neta de energía. Ambos problemas tienen solución analítica exacta.



El caso que será tratado aquí es el más general de ellos en donde la cuerda está sometida a un amortiguamiento a través de un rozamiento viscoso proporcional a la velocidad. Este problema, si bien ha sido resuelto con anterioridad un gran número de veces es ilustrativo puntualizar una serie de detalles que en el tratamiento usual del mismo se suelen pasar por alto.

El enfoque usual del problema como se puede observar en [2], [3] es presentar solamente la solución para el caso de que la constante de amortiguamiento sea pequeña por lo que los modos característicos del problema presentan oscilaciones con un decaimiento exponencial, típico en este caso. Realizando una analogía válida con el problema de un grado de libertad, ya que cada modo presente en el movimiento general de la cuerda es independiente de los demás, este es un caso típico de oscilación subamortiguada.

En virtud a ello lo que se pretende en este trabajo es contemplar valores de constantes de amortiguamiento mayores, en donde en un mismo problema se encuentren presentes los demás comportamientos posibles, como es el caso de amortiguamiento crítico y sobreamortiguamiento. El hecho de que estén presentes estos comportamientos se debe a la descomposición de la oscilación en modos normales y a la dependencia crítica de éstos con el valor de la constante de amortiguamiento.

El objetivo con que se presenta este trabajo es mostrar que la utilización de modelos sencillos para la descripción de la propagación de ondas en medios continuos, tienen un gran valor didáctico y por otra parte el estudio profundo de estos fenómenos presentan como en este caso comportamientos no tan evidentes.

2. DESARROLLO MATEMATICO

2.1 Ecuación Gobernante

El problema clásico de la cuerda vibrante en el caso de amortiguamiento viscoso es

$$c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - k \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1)$$

donde k es la constante de amortiguamiento viscoso, c es la velocidad de propagación en la cuerda cuya expresión es $\sqrt{T/\rho}$.

Las condiciones iniciales y de borde las elegiremos de la siguiente forma:

$$v(x,0) = h(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = 0 \quad (2)$$

$$v(0,t) = v(L,t) = 0 \quad (3)$$



Donde hemos supuesto que la velocidad inicial de la cuerda es cero para simplificar el álgebra.

2.2 Resolución de la ecuación propuesta

La ecuación (1) se resuelve aplicando el clásico método de separación de variables en donde se propone

$$v(x,t) = f(t)V(x) \quad (4)$$

De esta manera, metiendo esta solución en la ecuación (1), las ecuaciones para $f(t)$ y $V(x)$ quedan de la forma

$$f''(t) + kf'(t) + \beta^2 c^2 f(t) = 0 \quad (5)$$

$$V''(x) + \beta^2 V(x) = 0 \quad (6)$$

La solución para $f(t)$ es

$$f(t) = A_1 e^{\frac{-k+d}{2}t} + A_2 e^{\frac{-k-d}{2}t} \quad (7)$$

donde $d = \sqrt{k^2 - 4\beta^2 c^2}$. Cuando $k^2 - 4\beta^2 c^2 > 0$ las raíces son reales y por lo tanto el discriminante d es real y para $k^2 - 4\beta^2 c^2 < 0$ las raíces son complejas, por lo tanto el discriminante d es imaginario. Cuando el discriminante d es igual a cero, la solución para $f(t)$ se transforma en

$$f(t) = A_1 e^{\frac{-k}{2}t} + A_2 t e^{\frac{-k}{2}t} \quad (8)$$

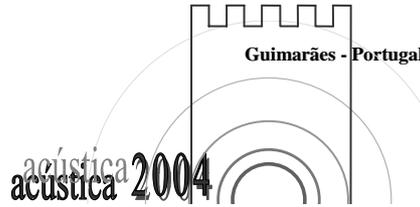
Para $V(x)$ la solución resulta, teniendo en cuenta las condiciones de borde (3)

$$V_n(x) = \sin(\beta_n x) \quad (9)$$

donde $\beta_n = \frac{n\pi}{L}, n = 1, 2, 3, \dots$

Por lo tanto la solución general a la ecuación (1) resulta

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_{1n} e^{\frac{-k+d_n}{2}t} + A_{2n} e^{\frac{-k-d_n}{2}t} \right) \sin(\beta_n x) \quad (10)$$



Por las condiciones iniciales se pueden determinar en forma directa los valores de las constantes A_{1n} y A_{2n} , obteniendo el siguiente resultado

$$A_{1n} + A_{2n} = \frac{2}{L} \int_0^L h(x) \sin(\beta_n x) dx \quad (11)$$

$$A_{2n} = A_{1n} \frac{d_n - k}{d_n + k} \quad (12)$$

Por lo tanto la solución general puede ser expresada como

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \left(\int_0^L h(x) \sin(\beta_n x) dx \right) \left[\left(\frac{d_n + k}{2d_n} \right) e^{\frac{-k+d_{n,t}}{2}} + \left(\frac{d_n - k}{2d_n} \right) e^{\frac{-k-d_{n,t}}{2}} \right] \sin(\beta_n x) \quad (13)$$

3. RESULTADOS

3.1 Ejemplo numérico

Analizaremos el caso en que el desplazamiento inicial sea $h(x) = \frac{1}{A} x(L-x)$. En este caso la solución que se obtiene, conociendo que

$$\frac{2}{L} \int_0^L h(x) \sin(\beta_n x) dx = -\frac{4L^2}{n^3 \pi^3 A} \left((-1)^{n-1} - 1 \right) = \begin{cases} \frac{8L^2}{n^3 \pi^3 A} & \text{para } n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & \text{para } n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

es la siguiente

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{8L^2}{n^3 \pi^3 A} \right] \left[\left(\frac{d_n + k}{2d_n} \right) e^{\frac{-k+d_{n,t}}{2}} + \left(\frac{d_n - k}{2d_n} \right) e^{\frac{-k-d_{n,t}}{2}} \right] \sin(\beta_n x) \quad (14)$$

Para la función $h(x)$ presentada en este caso los términos relevantes en la solución $v(x, t)$ son los primeros 3 ya que los siguientes son numéricamente despreciables (los coeficientes decaen como $1/n^3$). Como es bien conocido y deducible a partir de la ecuación (14), el movimiento total de la cuerda puede verse como la oscilación de los distintos modos, catalogados con n , cada uno de los cuales tendrá un comportamiento claramente dependiente en k y a su vez independientes entre sí.

Para que se esto se pueda visualizar, en lo que sigue mostraremos el comportamiento de los tres primeros modos de oscilación para distintos valores de k .

Se tomarán tres situaciones:

- el valor de d_n es real $k^2 - 4\beta_n^2 c^2 > 0$ para todo n ($M=0$)
- sólo para $n=1$ d_n es real y para $n > 1$ imaginario ($M=1$)
- hasta $n=3$ los valores de d_n son reales y los restantes imaginarios ($M=5; n=1,3,5$)

El valor de M denotará el valor de n a partir del cual el discriminante d_n es imaginario.

En los gráficos 1 a 3 pueden verse el comportamiento de los tres primeros modos para distintos valores de k .

En el gráfico 1 se grafican los mencionados modos para $k=1, c=1, L=1, A=100$, para $x=0.5$. En el gráfico 2 el valor de $k=10$, dejando los demás parámetros constantes y en el gráfico 3, se toma $k=100$ para iguales valores de c, L, A .

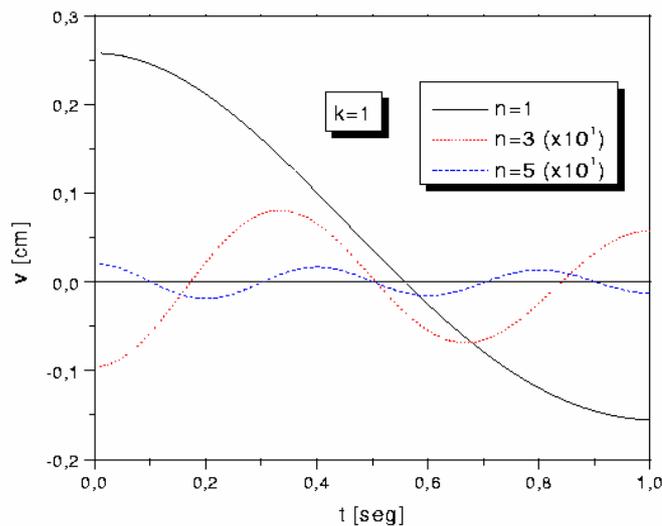


Figura 1 – Decaimiento de la amplitud de oscilación de los tres primeros modos para $x=0.5$ siendo la cond. inic. $h(x) = \frac{1}{100} x(L-x), k=1$. El discriminante d_n es real para todo n ($M=0$)

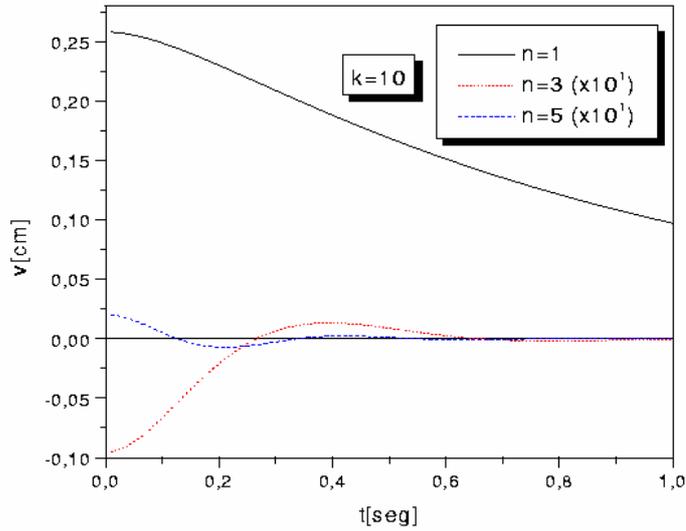


Figura 2 – *Idem figura 1* $k=10$. Sólo para $n=1$, d_n es real y para $n > 1$ imaginario ($M=1$)

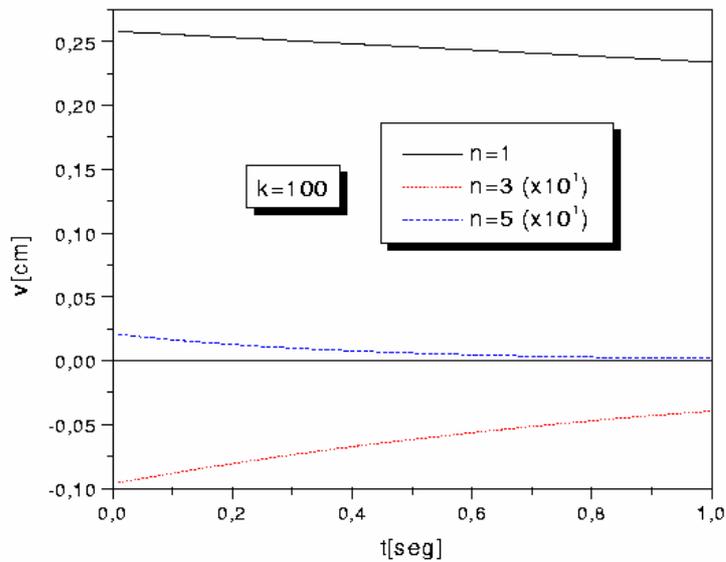
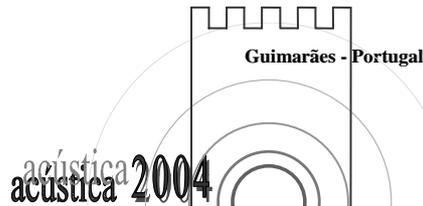


Figura 3 – *Idem figura 1* $k=100$; hasta $n=3$ los valores de d_n son reales y los restantes imaginarios ($M=5$); ($n=1,3,5$)



5. CONCLUSIÓN

Es interesante el hecho de que el comportamiento de la solución a la ecuación diferencial para el caso de una cuerda vibrante con rozamiento viscoso depende fuertemente del valor de la constante k de amortiguamiento.

En el trabajo se han mostrando claramente cuan dependiente de la constante de amortiguamiento es el comportamiento de los distintos modos presentes en una determinada oscilación. Este es un hecho que llamativamente ha pasado desapercibido en la mayoría de los textos usuales [1], [2] y puede llevar a algún tipo de confusión cuando no se plantea correctamente. Además, desde un punto de vista físico es interesante recalcar que en este tipo de problemas los modos de la oscilación pueden tener comportamientos claramente diferentes unos de otros, es decir pueden: o bien decaer a cero exponencialmente sin oscilar (el discriminante d_n es real para ese modo de oscilación) o bien decaer a cero oscilando previamente respecto de su posición de equilibrio (discriminante d_n es imaginario en ese caso). En este sentido creemos que el caso más general, en el cual estén presentes estos dos tipos de amortiguamiento al mismo tiempo, puede ser útil desde un punto de vista didáctico ya que permite observar estos dos casos conjuntamente en un mismo problema.

Por otra parte el sistema diferencial gobernante (ecuación (1)) constituye también una aproximación de primer orden al problema de vibraciones longitudinales o torsionales de una barra de material elástico lineal como también a la propagación de ondas acústicas en tubos (en la aproximación de onda plana). Por consiguiente el presente tratamiento posee aplicación en estos casos de considerable interés tecnológico cuando la barra está sumergida en un medio líquido de considerable viscosidad.

RECONOCIMIENTOS

Este trabajo fue auspiciado por la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur, quien, a través de su programa de asistencia a jóvenes graduados ha permitido al Sr. M. Febbo poder asistir a la presentación del presente trabajo en la ciudad de Guimaraes, Portugal.

A su vez los autores agradecen el apoyo financiero del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).

REFERENCIAS

- [1] Lord Rayleigh; *The Theory of Sound*. New York: Dover Publications, 2nd edition, 1945.
- [2] P. M. Morse, H. Feshbach; *Methods of Theoretical Physics*. Mc. Graw-Hill, New York, 1953.
- [3] D. R. Bland; *Vibrating Strings*. Routledge, Kegan Paul London. 1965.