

PERSPETIVA SOBRE A APLICAÇÃO DE MÉTODOS NUMÉRICOS AVANÇADOS EM PROBLEMAS ACÚSTICOS EXTERIORES

PACS no. 43.28.Js, 43.20.Rz

GODINHO, Luís¹

¹ ISE, Departamento de Eng.^a Civil Universidade de Coimbra, Portugal
Rua Luís Reis Santos, Pólo II da FCTUC, 3030-788 Coimbra, Portugal
lgodinho@dec.uc.pt

ABSTRACT

Numerical methods based only on the description of the boundaries of a propagation medium, such as the BEM or the MFS, allow a particularly elegant and accurate approach to acoustic propagation problems in open environments, as is often the case in environmental acoustics. Here, an overview on the evolution of these methods, briefly explaining their formulation and identifying the main differences with classical methods (such as FEM or FDTD) is given. The development of advanced formulations for solving large problems is discussed, and several application examples are presented illustrating their potential in the simulation and solution of acoustic problems.

Keywords: Numerical methods; Boundary Elements; Method of Fundamental Solutions; external problems.

RESUMO

Os métodos numéricos baseados apenas na descrição das fronteiras do meio de propagação, como o BEM ou o MFS, permitem uma abordagem particularmente elegante e precisa a problemas acústicos de propagação em campo aberto, como é frequentemente o caso em acústica ambiental. Apresenta-se, aqui, uma perspectiva sobre a evolução destes métodos, explicando brevemente a sua formulação e identificando as principais diferenças em relação a métodos clássicos (como FEM ou FDTD). Aborda-se o desenvolvimento de formulações avançadas para a resolução de problemas de grande dimensão, e apresentam-se vários exemplos de aplicação, ilustrativos do seu potencial na simulação e resolução de problemas acústicos.

Palavras-chave: Métodos numéricos; Elementos de Fronteira; Método das Soluções Fundamentais; Problemas Exteriores.

1. INTRODUÇÃO

Os métodos numéricos têm vindo a ser uma ferramenta extremamente poderosa e versátil em vários campos da engenharia, permitindo a simulação de cenários genéricos e complexos de forma realista. No caso específico da acústica, a aplicação de métodos numéricos reveste-se de grande importância na análise de diferentes tipos de sistemas, permitindo a engenheiros e investigadores uma análise de diferentes configurações em condições de “laboratório virtual”.

Embora não possam substituir uma experiência laboratorial, estes métodos permitem, numa fase preliminar de conceção, desenvolvimento e estudo, uma enorme poupança de tempo e de recursos, dando ainda aos utilizadores a facilidade de realizar análises de sensibilidade, compreendendo de que forma diferentes parâmetros influenciam o comportamento de um determinado sistema.

Thommée [1] publicou em 2001 um interessante apanhado histórico sobre os diferentes métodos, onde se regista que as referências mais antigas que se podem encontrar são relativas a um trabalho teórico fundamental de Courant, Friedrichs e Lewy, publicado em 1928, onde se lançaram as bases para a resolução de problemas por diferenças finitas. Múltiplas referências podem ser encontradas desde então a este método (veja-se, por exemplo, [2]), incluindo a sua aplicação no domínio da acústica. No caso do método dos elementos finitos, e ainda de acordo com Thommée [1], alguns trabalhos pioneiros são devidos a Turner, Clough, Martin e Topp (1956), aparecendo o nome “Elementos Finitos” pela primeira vez num trabalho de Clough em 1960. Desde então, o método tem sido aplicado a múltiplos problemas de física e engenharia, sendo referências abrangentes Zienkiewicz e Taylor [3] ou Bathe [4]; para o caso específico de problemas acústicos, refere-se Marburg e Nolte [5]. Embora os dois métodos tenham diferenças assinaláveis, ambos partem de uma análise do domínio através da sua discretização em pontos ou em elementos.

O método dos elementos de fronteira é um pouco mais recente que os restantes dois. Em 2004, uma publicação de Cheng e Cheng [6], na revista *Engineering Analysis with Boundary Elements*, procurou identificar as origens históricas do Método dos Elementos de Fronteira (BEM). Algumas das contribuições iniciais devem-se a Jaswon e colaboradores, no “Imperial College” em Londres, que em 1963 exploraram métodos integrais directos e indirectos para resolução de problemas de potencial. Quase em simultâneo, por volta de 1965, Kupradze e colaboradores, na “Tbilisi State University”, estudaram problemas de potencial e elasticidade usando o mesmo conceito. Um pouco mais tarde, nos EUA, Cruse e colaboradores, desenvolveram o método então conhecido como Método da Equação Integral de Fronteira, e em Southampton, Reino Unido, um outro grupo, onde se destaca o nome de Brebbia, dedicava-se, então, ao aprofundamento dos trabalhos de Kupradze usando integrais de fronteira. É na década de 1970 que, fruto da colaboração entre Brebbia e Cruse, surge o método dos elementos de fronteira, tal como hoje é conhecido. Ao contrário dos dois outros métodos referidos atrás, este método não discretiza o domínio mas sim as suas fronteiras, o que lhe confere uma grande elegância na modelação de diferentes tipos de problemas. Muita informação sobre este método pode ser encontrada, por exemplo, em Brebbia [7] ou Brebbia e Domiguez [8]; no caso da aplicação a problemas de acústica, referem-se Wu [9], von Estorff [10] ou Marburg e Nolte [5].

A evolução e o aparecimento de técnicas numéricas não parou, no entanto, por aqui, e na década de 1990 emergiu uma nova classe de técnicas, designadas por “Métodos sem malha”. Na realidade, a grande diferença destes métodos para os anteriormente referidos prende-se com a ausência de uma discretização estruturada do domínio, em elementos (FEM) ou em grelhas regulares (FD), ou sequer das fronteiras (BEM); em lugar destas discretizações, estes métodos fazem apenas uso de pontos dispersos no espaço a analisar para, usando diferentes abordagens, encontrar uma solução para o problema físico a resolver. São exemplos destes métodos o Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) proposto por Atluri [11], ou o Método das Soluções Fundamentais (MFS); em relação a este último, embora não se consiga identificar um trabalho específico na sua origem, merecem referência os de Chen et al [12], Fairweather et al [13], Karagheorghis et al [14] e Golberg et al [15]. O MLPG e outros métodos similares podem comparar-se ao método dos elementos finitos, uma vez que se baseiam na obtenção de uma solução usando pontos dispersos por todo o domínio; já o MFS poderá ser referido como comparável ao método dos elementos de fronteira, pois, de forma similar a este, apenas faz uso de pontos sobre a fronteira para estabelecer equações que permitem encontrar a solução do problema a resolver.

O BEM e o MFS podem ser vistos como particularmente adequados à resolução de problemas acústicos. De facto, enquanto grande parte dos restantes métodos referidos fazem uso de funções matemáticas simples, muitas vezes polinomiais, para aproximar a solução, estes dois métodos incorporam diretamente na sua formulação uma parte da física do problema, uma vez que fazem uso de funções que usualmente se designam por “Soluções Fundamentais” do problema. Estas funções não são mais do que a solução da equação diferencial governante em condições de campo infinito, devendo-se a definição deste conceito ao trabalho de George

Green, já em 1828. Ao incorporar estas funções na sua formulação, estes dois métodos tornam-se extraordinariamente adequados e potentes para a análise de problemas em meios não limitados (ou infinitos), uma vez que estas funções lhes permitem satisfazer diretamente as condições de campo afastado no infinito, sem necessitar de condições absorventes ou outros artifícios numéricos para o efeito (ao contrário, por exemplo, do FEM, do FD ou do MLPG). São, por isso, estes dois métodos os que se abordam e exemplificam na presente comunicação, procurando transmitir uma perspetiva geral sobre a sua aplicação na área da acústica e da sua utilidade prática, não só em problemas conceptuais como também em problemas práticos de engenharia.

Nas secções que se seguem, apresenta-se, em primeiro lugar, uma muito breve formulação dos dois métodos tratados; segue-se, depois, uma breve discussão da sua eficiência computacional e de estratégias existentes para a resolução de problemas de grande dimensão; apresentam-se, finalmente, alguns problemas exemplificativos da grande aplicabilidade prática destes métodos na resolução de problemas acústicos de propagação no exterior, baseados em desenvolvimentos realizados pelo autor [16-23].

2. BREVE FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Considera-se, usualmente, que a propagação de ondas acústicas em regime linear pode, no domínio da frequência, ser representada pela equação diferencial de Helmholtz, no domínio da frequência:

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 \quad (1)$$

onde $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ em 2D ou $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ em 3D, p é a pressão acústica, $k = \omega/c$, ω é a frequência angular e c a velocidade de propagação das ondas no meio fluido. Embora alguns efeitos (movimento do fluido, efeitos não lineares, etc.) não estejam incorporados nesta equação, em grande parte dos problemas puramente acústicos ela pode ser usada como uma boa aproximação à realidade. A sua resolução pode ser realizada, conforme já abordado, por distintos métodos, entre os quais os dois que serão objeto desta contribuição: o BEM e o MFS.

2.1 O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE FRONTEIRA - BEM

Conforme já se referiu na secção anterior, para o estudo da propagação de ondas o BEM poderá ser indicado como um dos métodos com maiores potencialidades, em particular em problemas exteriores, em que os sistemas são infinitos ou semi-infinitos. O BEM possui a vantagem de apenas requerer a discretização das fronteiras e de eventuais descontinuidades que possam existir no meio de propagação, evitando a discretização espacial do domínio de propagação que, por norma, alguns dos restantes métodos exigem. No caso da propagação de ondas sonoras num meio fluido, infinito e homogéneo (caso acústico), que contém no seu interior uma inclusão, o BEM pode, sucintamente, descrever-se a partir da equação integral de fronteira definida ao longo da fronteira S da inclusão,

$$p_{inc}(\underline{x}_p, \underline{x}_0) + \int_S q(\underline{x}) p^*(\underline{x}_p, \underline{x}) dS = \int_S q^*(\underline{x}_p, \underline{x}) p(\underline{x}) dS + Cp(\underline{x}_p) \quad (2)$$

onde $p(\underline{x})$ e $q(\underline{x})$ representam a pressão e o seu gradiente na direção normal à fronteira da inclusão no ponto \underline{x} , e $p(\underline{x}_p)$ representa a pressão no ponto de aplicação do carregamento virtual. C é uma constante que assume o valor 1 se o ponto estiver no domínio de propagação, $1/2$ se estiver na fronteira e 0 se estiver fora do meio de propagação.

De forma a poder aplicar o BEM à resolução desta equação, torna-se necessário o conhecimento prévio das soluções fundamentais, que definem o campo de pressões gerado por cargas

unitárias localizadas num meio fluido. Para o caso de cargas lineares bidimensionais, oscilando com uma frequência ω , essa solução é dada por:

$$p^*(\underline{x}_p, \underline{x}) = -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(kr) \quad (3)$$

onde $k=\omega/c$, ω é a frequência angular e c a velocidade de propagação das ondas no meio fluido, e r é a distancia do ponto \underline{x}_p de aplicação da carga ao ponto \underline{x} . No caso de problemas tridimensionais, a solução fundamental pode ser definida como:

$$p^*(\underline{x}_p, \underline{x}) = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \quad (4)$$

Em lugar da utilização do gradiente de pressões, $q = \frac{\partial p}{\partial \vec{n}}$, é usual recorrer-se à representação da equação integral em função de pressões e de velocidades das partículas segundo a direção normal à fronteira ($v_{\vec{n}}$), sendo que $v_{\vec{n}} = -\frac{1}{i\rho\omega} \frac{\partial p}{\partial \vec{n}}$, onde ρ é a massa volúmica do meio fluido.

Considerando a discretização da fronteira em elementos de fronteira retilíneos (em 2D) ou planos (em 3D), e considerando ainda que as pressões e deslocamentos num elemento de fronteira são representados pelos valores registados num ponto interior ao elemento (nó), e que o seu valor é constante dentro de cada elemento, pode escrever-se a equação:

$$\begin{aligned} p_{inc}(\underline{x}_p, \underline{x}_0) - i\rho\omega \sum_{n=1}^N v_{\vec{n}}^n \int_{S_n} p^*(\underline{x}_p, \underline{x}_n) dS_n \\ = \sum_{n=1}^N p^n \int_{S_n} q^*(\underline{x}_p, \underline{x}_n) dS_n + Cp(\underline{x}_p) \end{aligned} \quad (5)$$

onde p^n e $v_{\vec{n}}^n$ representam as pressões e as velocidades normais no nó do elemento de fronteira n . A aplicação sucessiva desta equação ao longo da fronteira permite o estabelecimento de um sistema de equações que leva à obtenção dos valores nodais da pressão e da velocidade. A Figura 1 representa uma configuração exemplificativa de um modelo BEM referente a um problema exterior.

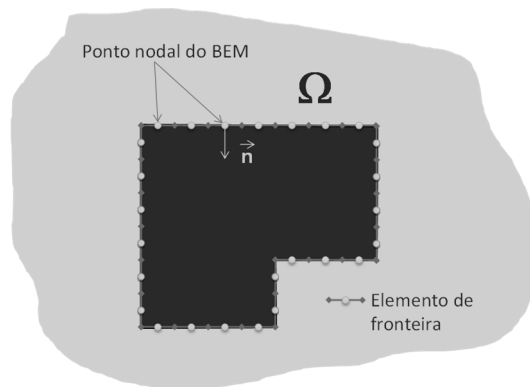


Figura 1 – Esquema exemplificativo de um modelo BEM.

2.2 O MÉTODO DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS - MFS

A utilização do MFS para a resolução da equação diferencial de Helmholtz torna-se bastante simples, não envolvendo qualquer integral de fronteira ou de domínio. Na realidade, o método parte de uma representação do campo de pressões sonoras simples, realizada a partir de uma

combinação linear de fontes sonoras virtuais, localizadas fora do domínio de análise, e cujo efeito pode ser descrito através da solução fundamental correspondente ao tipo de problema a resolver. A título de exemplo, considerando o caso simples da Figura 2, o campo de pressões no domínio Ω pode ser escrito como a combinação linear do efeito de NVS fontes virtuais localizadas fora do próprio domínio; se existirem NS fontes reais dentro de Ω , o seu efeito pode também ser diretamente incorporado, obtendo-se a seguinte representação para o campo de pressões:

$$p(\underline{x}, k) = \sum_{j=1}^{NVS} Q_j G(\underline{x}, \underline{x}_j, k) + \sum_{m=1}^{NS} A_m G(\underline{x}, \underline{x}_0^{(m)}, k) \quad (6)$$

Note-se que nesta equação os fatores Q_j são à partida desconhecidos, e têm que ser calculados através da resolução de um sistema de equações. Para formar este sistema, torna-se necessário impor condições de fronteira adequadas num conjunto de pontos discretos sobre a fronteira (pontos de colocação), na forma de pressões ou velocidades conhecidas, ou de uma impedância superficial. Não sendo objetivo deste trabalho a descrição exhaustiva da formulação, o leitor pode encontrar os detalhes matemáticos em Godinho et al [24, 25].

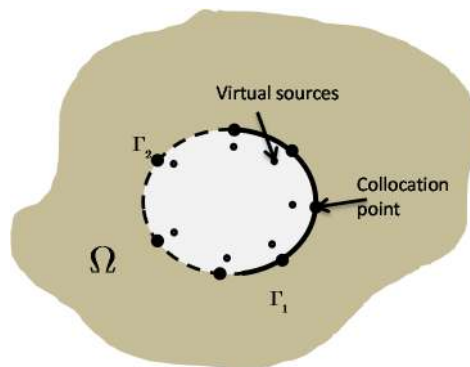


Figura 2 – Representação esquemática do problema para aplicação do MFS.

2.3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GRANDE DIMENSÃO

Um dos principais problemas dos métodos agora apresentados prende-se com a sua aplicação a problemas de grande dimensão, em que se necessita de utilizar um grande número de pontos/elementos para descrever as suas fronteiras. Por serem métodos baseados em soluções fundamentais, com valor não nulo em todo o domínio, a matriz do sistema de equações a resolver é completamente preenchida, o que origina um enorme custo computacional (em particular em termos de memória) se o número de nós/elementos for elevado. Por esse motivo, têm vindo a ser desenvolvidas técnicas complementares que permitem uma mais eficiente implementação, com uma muito significativa poupança de memória e tempo de cálculo. Uma revisão destes métodos pode ser encontrada no trabalho de Liu et al [26], incluindo uma descrição matemática das principais estratégias disponíveis.

No contexto do presente trabalho, refere-se apenas a grande utilidade de métodos como o “Fast Multipole Method” ou o “Adaptive-Cross-Approximation”, que permitem, quando usados em conjunto com algoritmos iterativos de resolução de sistemas, uma grande poupança de memória e tempo de cálculo. Em ambos os casos, os métodos baseiam-se na análise da geometria do problema e na identificação de zonas entre as quais ocorrem interações fracas ou fortes, e dividindo a matriz global do problema em múltiplas submatrizes, e usando uma estrutura hierárquica. Abordando por exemplo o “Adaptive-Cross-Approximation”, no caso de interação forte, esta é abordada com a formulação BEM tradicional para o cálculo da respetiva submatriz; no entanto no caso de interação fraca entre duas regiões, o seu cálculo pode ser muito simplificado e acelerado, calculando apenas algumas componentes da respetiva submatriz. A Figura 3a ilustra esquematicamente a configuração da matriz de sistema; nesta figura, a matriz encontra-se dividida em submatrizes, e apenas os pequenos blocos que se encontram representados a negro necessitam de ser completamente calculados, sendo os restantes aproximados pelo método referido. Para ter uma perspetiva sobre a poupança de memória que

a estratégia permite, a Figura 3b ilustra, para um mesmo problema genérico, os requisitos de memória do BEM tradicional e do BEM em conjunto com esta abordagem, sendo possível observar uma redução dos requisitos de memória para cerca de 20% dos originais. A mesma estratégia pode ser usada com o MFS, conduzindo a resultados semelhantes.

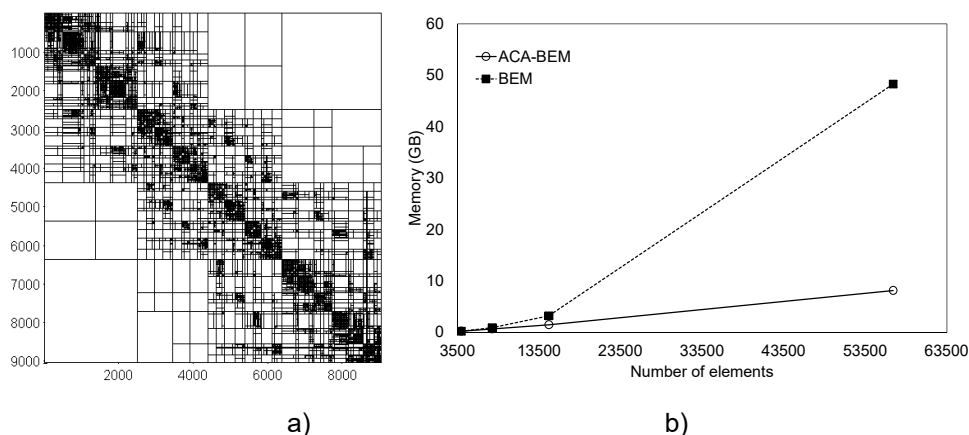


Figura 3 – a) Representação esquemática da divisão de uma matriz de grande dimensão em múltiplas submatrizes para aplicação do método “Adaptive-Cross-Approximation”.

Para complementar a informação agora apresentada, na Figura 4 ilustra-se o tempo de cálculo para os mesmos dois modelos (BEM convencional e com “Adaptive-Cross-Approximation”), para a resolução de um mesmo problema com diferentes discretizações. Também para o tempo de cálculo se torna evidente a enorme vantagem proporcionada por este tipo de estratégia.

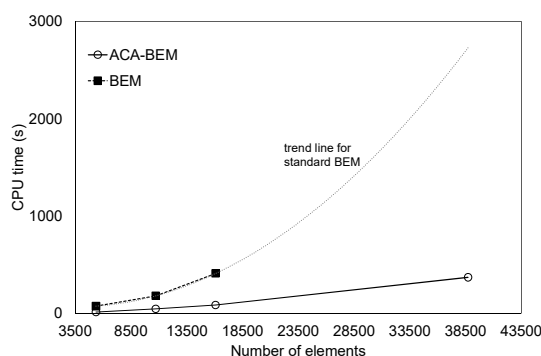


Figura 4 – Evolução típica do tempo de CPU necessária para o BEM e para o BEM com “Adaptive-Cross-Approximation” para um problema de teste.

3. EXEMPLOS PRÁTICOS DE APLICAÇÃO

Existem múltiplas publicações onde os métodos descritos foram já aplicados em modelações de engenharia acústica, incluindo modelos de muito grande dimensão, como por exemplo o artigo de revisão de Liu et al [26] ou as referências [5], [9] e [10]. A título de exemplo, ilustram-se nas figuras 5, 6 e 7 aplicações do BEM e do MFS, realizadas pelo autor, em três cenários distintos: propagação de ondas acústicas em redor de barreiras acústicas [16, 17]; estudo do desempenho de cornetas (“Horns”) acústicas [18, 19]; estudo do comportamento de cristais sónicos e estruturas periódicas [20, 21, 22, 23]. Estas figuras são apenas exemplificativas de algumas possíveis aplicações dos métodos abordados, e todos os detalhes sobre este tópico podem ser encontrados totalmente descritos nas referências indicadas. Dado o âmbito da presente comunicação, não se exploram ou sequer se descrevem aqui estes resultados.

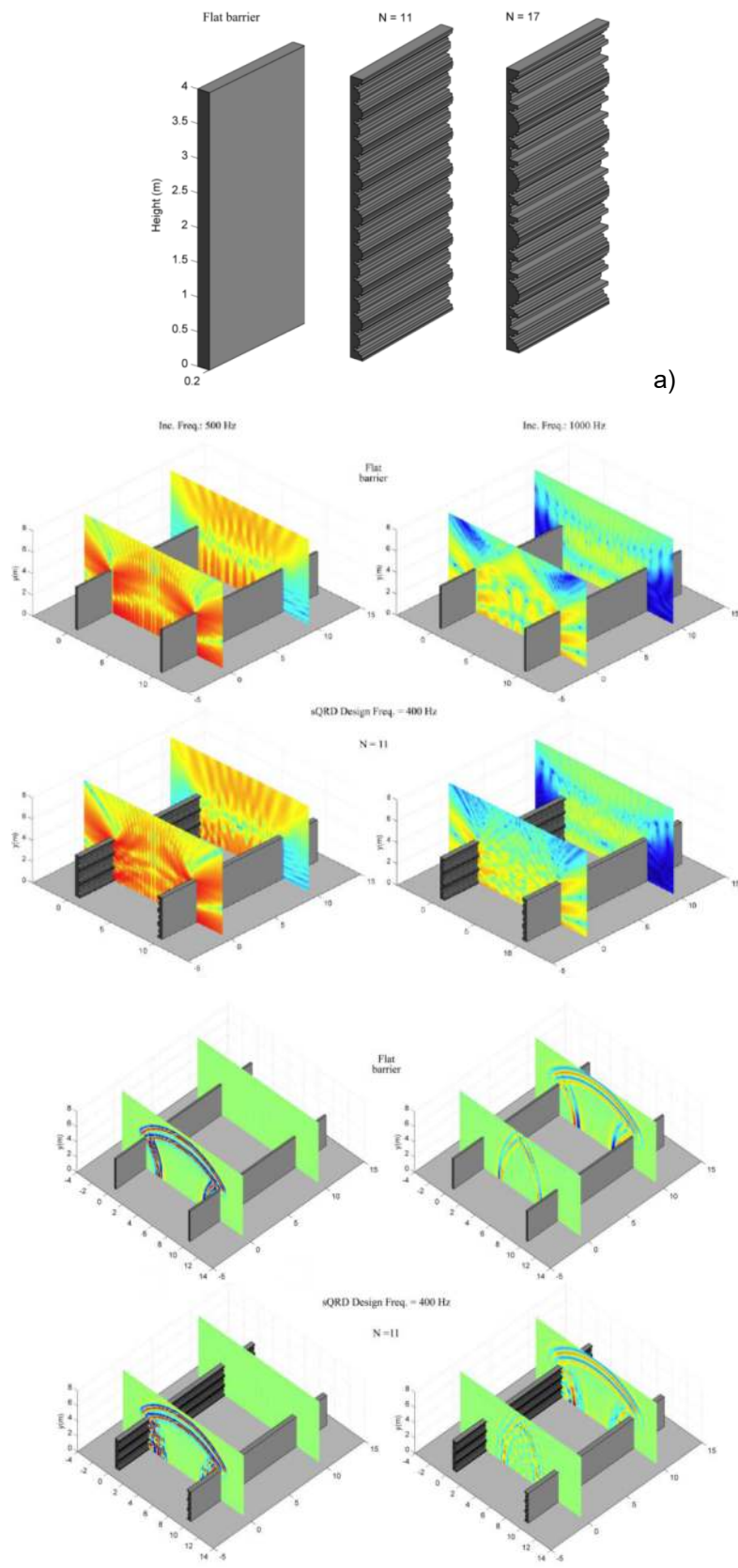


Figura 5 – Exemplo de aplicação do BEM a estruturas do tipo barreira acústica com superfície irregular: a) geometria da superfície da barreira; b) Distribuição do SPL para 500Hz (esquerda) e 1000 Hz (direita); c) Propagação da onda acústica no domínio do tempo nos instantes 17.7ms e 34.3ms.

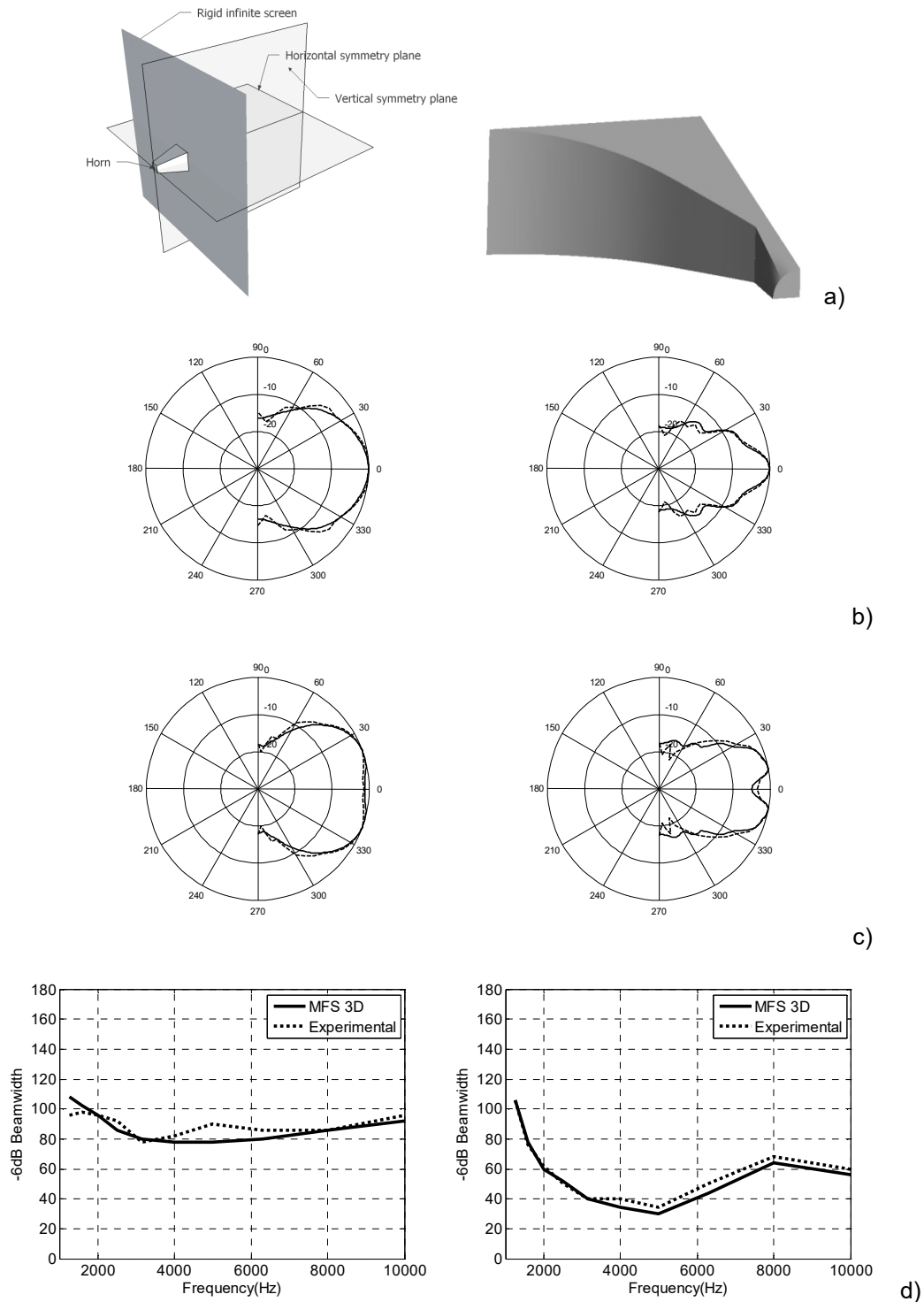


Figura 6 – Exemplo de aplicação do MFS à modelação 3D de uma “horn”: a) aspeto global do modelo MFS 3D; b) diretividade a 5000 Hz segundo um plano horizontal e vertical (experimental a tracejado, MFS a cheio); c) diretividade a 10000 Hz segundo um plano horizontal e vertical (experimental a tracejado, MFS a cheio); d) ângulo de cobertura da “horn” a -6dB no plano horizontal e vertical.

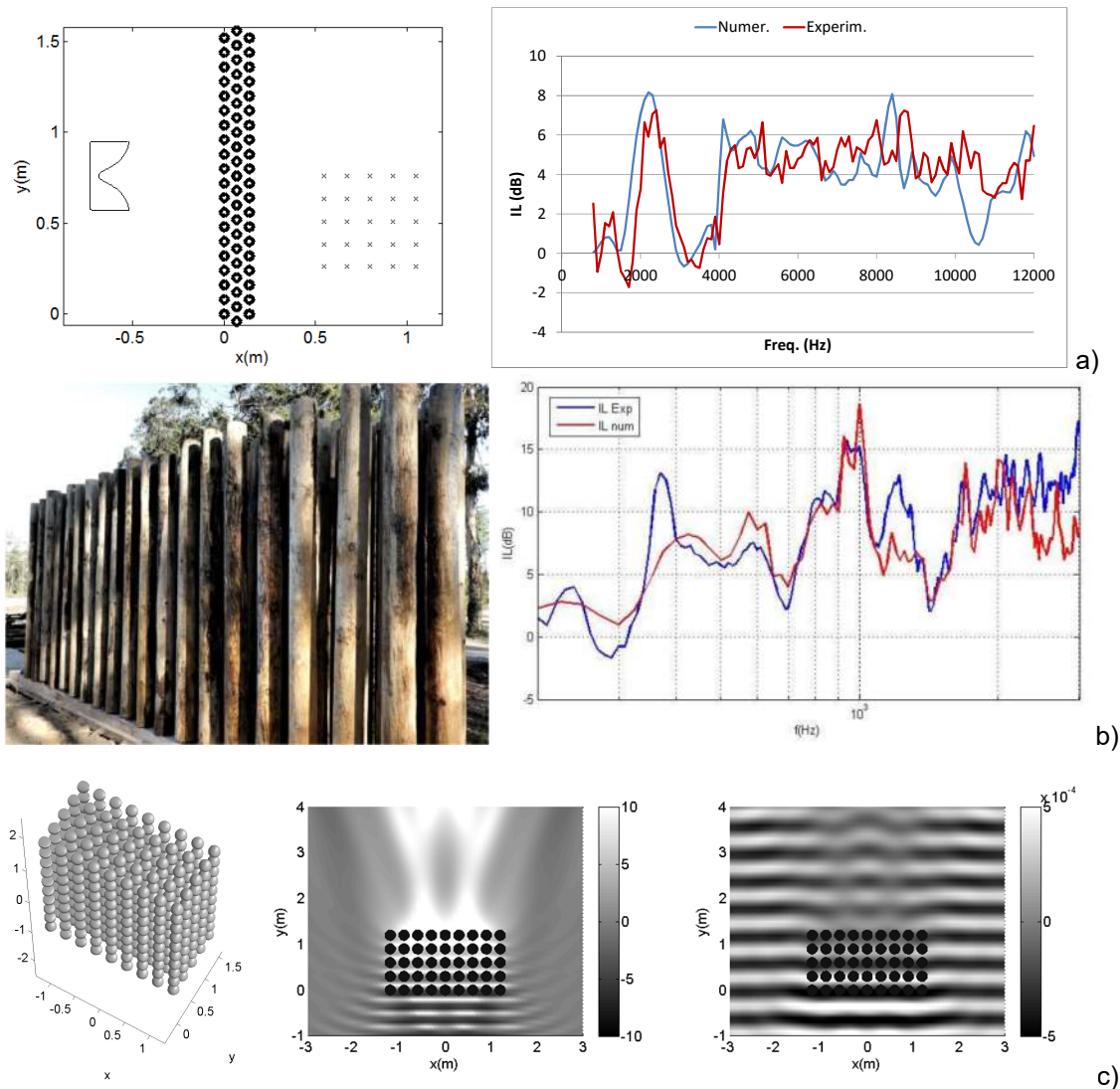


Figura 7 – Exemplo de aplicação na modelação de estruturas periódicas: a) modelação MFS 2D de um cristal sónico e comparação com medição experimental realizada em laboratório; b) comparação de resultado de modelação MFS de um cristal sónico com medição experimental; c) modelação MFS 3D uma estrutura periódica finita constituída por 450 esferas (à esquerda) e perda por inserção nos 567 Hz (centro) e 840 Hz (direita).

4. CONCLUSÕES

A presente contribuição pretendeu apresentar, de uma forma breve e sucinta, uma perspetiva sobre os conceitos fundamentais e o potencial de aplicação de dois métodos numéricos de grande interesse no domínio da acústica. Embora menos divulgados que o mais tradicional método dos elementos finitos, os métodos dos elementos de fronteira e das soluções fundamentais apresentam algumas vantagens específicas para aplicações no domínio da acústica, em particular em domínios infinitos ou semi-infinitos. De facto, os dois métodos permitem uma descrição muito compacta dos meios de propagação apenas em termos das suas fronteiras, e permitem incluir automaticamente as condições de campo infinito em meios não limitados de forma muito rigorosa, dispensando condições fictícias ou camadas absorventes. A elegância matemática e de discretização que os métodos proporcionam, o seu rigor, e a capacidade que os atuais meios computacionais lhes conferem para lidar com problemas de grande dimensão justificam o seu conhecimento por parte de investigadores e engenheiros da área da acústica, e podem abrir portas à resolução de problemas bastante complexos e de abordagem difícil pelos métodos mais tradicionais.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho beneficiou do apoio de fundos do FEDER através do COMPETE e de fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do projeto POCI-01-0145-FEDER-007633.

REFERÊNCIAS

- [1] Thomée, V. (2001). From finite differences to finite elements: A short history of numerical analysis of partial differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 128(1), 1-54.
- [2] Mitchell, A. R., & Griffiths, D. F. (1980). *The finite difference method in partial differential equations*. John Wiley.
- [3] Zienkiewicz, O. C., & Taylor, R. L. (2000). *The finite element method: solid mechanics* (Vol. 2). Butterworth-heinemann.
- [4] Bathe, K. J. (2006). *Finite element procedures*. Klaus-Jurgen Bathe.
- [5] Marburg, S., & Nolte, B. (2008). *Computational acoustics of noise propagation in fluids: finite and boundary element methods* (Vol. 578). Berlin: Springer.
- [6] Cheng, A. H. D., & Cheng, D. T. (2005). Heritage and early history of the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29(3), 268-302.
- [7] Brebbia, C. A. (1982). *Boundary element methods in engineering* (pp. 1-649). New York, NY, USA: Springer.
- [8] Brebbia, C. A., & Dominguez, J. (1994). *Boundary elements: an introductory course*. WIT press.
- [9] Wu T. (Ed.), *Boundary element in acoustics*, Southampton, UK: WIT Press; 2000.
- [10] von Estorff, O. (Ed.). (2000). *Boundary elements in acoustics: advances and applications* (Vol. 9). Wit Pr/Computational Mechanics.
- [11] Atluri, S. N. (2004): *The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method*. Tech. Science Press.
- [12] Chen CS, Cho HA, Golberg MA. Some comments on the ill-conditioning of the method of fundamental solutions. *Eng Anal Bound Elem* 2006; 30: 405-410.
- [13] A. Karageorghis and G. Fairweather, The method of fundamental solutions for axisymmetric acoustic scattering and radiation problems, *J. Acoust. Soc. Am.*, 104 (1998), 3212-3218.
- [14] G. Fairweather, A. Karageorghis, P.A. Martin, The method of fundamental solutions for scattering and radiation problems. *Eng Anal Bound Elem*, 27 (2003), 759 –69.
- [15] Golberg, M. A., Chen, C. S. (1998). The method of fundamental solutions for potential, Helmholtz and diffusion problems. *Boundary Integral Methods-Numerical and Mathematical Aspects*, 103-176.
- [16] Prieto Gajardo, C., Godinho, L., Amado-Mendes, P., & Barrigon Morillas, J. M. (2015). Numerical analysis of acoustic barriers with a diffusive surface using a 2.5 D boundary element model. *Journal of Computational Acoustics*, 23(03), 1550009.
- [17] Godinho, L., António, J., & Tadeu, A. (2001). 3D sound scattering by rigid barriers in the vicinity of tall buildings. *Applied Acoustics*, 62(11), 1229-1248.
- [18] Godinho, L., Mendes, P. A., Ramis, J., Cardenas, W., & Carbajo, J. (2012). A numerical MFS model for computational analysis of acoustic horns. *Acta Acustica united with Acustica*, 98(6), 916-927.
- [19] Godinho, L., Amado-Mendes, P., Carbajo, J., & Ramis-Soriano, J. (2015). 3D numerical modelling of acoustic horns using the method of fundamental solutions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 51, 64-73.

- [20] Martins, M., Godinho, L., & Picado-Santos, L. (2013). Numerical evaluation of sound attenuation provided by periodic structures. *Archives of Acoustics*, 38(4), 503-516.
- [21] Godinho, L., Soares, D., & Santos, P. G. (2016). Efficient analysis of sound propagation in sonic crystals using an ACA–MFS approach. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 69, 72-85.
- [22] Godinho, L., Amado-Mendes, P., Pereira, A., & Soares, D. (2017). An Efficient MFS Formulation for the Analysis of Acoustic Scattering by Periodic Structures. *Journal of Computational Acoustics* (to appear).
- [23] Godinho, L., Santos, P.G., Amado-Mendes, P., Pereira, A., Martins, M. (2016). Experimental and numerical analysis of sustainable sonic crystal barriers based on timber logs. *Euroregio 2016*, Porto, Portugal.
- [24] Godinho, L., Tadeu, A., & Mendes, P. A. (2007). Wave propagation around thin structures using the MFS. *CMC*, 5(2), 117.
- [25] Godinho, L. M. C., Costa, E. G. A., Pereira, A. S. C., & Santiago, J. A. F. (2012). Some observations on the behavior of the method of fundamental solutions in 3D acoustic problems. *International Journal of Computational Methods*, 9(04), 1250049.
- [26] Liu, Y. J., Mukherjee, S., Nishimura, N., Schanz, M., Ye, W., Sutradhar, A., Pan, E., Dumont, N., Frangi, A., Saez, A. (2011). Recent advances and emerging applications of the boundary element method. *Applied Mechanics Reviews*, 64(3), 030802.