

## UN MODELO NUMÉRICO PARA EL ANÁLISIS NO LINEAL DE ONDAS ULTRASÓNICAS ESTACIONARIAS EN LÍQUIDOS CON BURBUJAS

PACS: 43.25.Yw

Tejedor Sastre María Teresa; Vanhille Christian  
Universidad Rey Juan Carlos  
Tulipán, s/n. 28933 Móstoles, Madrid  
España  
Tel.: 916647482  
Fax.: 914887338  
E-Mail: mariateresa.tejedor@urjc.es, christian.vanhille@urjc.es

### ABSTRACT

The objective of this work is to analyze the nonlinear effects that appear in a resonator filled with a bubbly liquid when it is excited by an ultrasonic wave of large amplitude. We have developed a new numerical model to solve the differential equation system that couples the wave equation with the vibrations of the bubbles. This model combines the finite volume method and the finite difference method. The results presented here allow us to observe the nonlinear distortion of the ultrasonic wave. The authors acknowledge the support of the Ministry of Economy and Competitiveness of Spain (DPI2012-34613, BES-2013-064399).

### RESUMEN

El objetivo de este trabajo es analizar los efectos no lineales que aparecen en un resonador relleno de líquido con burbujas cuando se estimula con una onda ultrasónica de gran amplitud. Para ello se ha desarrollado un nuevo modelo numérico que permite resolver el sistema diferencial que acopla la ecuación de ondas con las vibraciones de las burbujas. Dicho modelo combina el método de los volúmenes finitos y el método de las diferencias finitas. Los resultados presentados permiten observar el fenómeno de distorsión no lineal. Los autores agradecen el apoyo del Ministerio de Economía y Competitividad de España (DPI2012-34613, BES-2013-064399).

### 1. INTRODUCCIÓN

Existe un interés creciente por entender los fenómenos que tienen lugar durante la propagación de ondas ultrasónicas de gran amplitud en medios no lineales. Uno de los medios no lineales que más interés despierta es el caso de líquidos en los que existe una población de burbujas de gas. Las burbujas se generan por cavitación acústica [1] o se añaden al líquido formando una suspensión [2]. Las aplicaciones en las que las burbujas y el campo ultrasónico interactúan van desde procesos industriales [3] hasta técnicas de diagnóstico y tratamiento en

medicina [2]. A nivel teórico ese interés resulta del hecho de que la no linealidad del líquido aumenta mucho en presencia de burbujas [1,4].

La propagación lineal de los ultrasonidos de baja amplitud en medios líquidos con burbujas se ha estudiado en profundidad [5]. Cuando sube la amplitud de la onda, las oscilaciones no lineales de las burbujas provocan efectos no lineales en el campo ultrasónico que, junto con la dispersión y la disipación del medio, generan ondas complejas [4]. Conviene tener herramientas de simulación de esas ondas no lineales. Algunos códigos existen en la literatura [6-8]. Sin embargo el desarrollo de nuevos métodos numéricos más versátiles, sobre todo en el aspecto multidimensional, resulta ser imprescindible.

En esta comunicación se presenta una nueva herramienta numérica que permite simular el comportamiento no lineal de ondas ultrasónicas en un resonador relleno de líquido con burbujas de gas. Para ello se resuelve un sistema diferencial que acopla la presión acústica y la variación de volumen que experimentan las burbujas en una dimensión mediante un método basado en el método de los volúmenes finitos combinado con el método de las diferencias finitas. La Ref. [6] resuelve el problema mediante otro método y nos sirve aquí para comparar los resultados.

El Apartado 2 describe el modelo físico-matemático que permite estudiar la interacción entre el campo ultrasónico y la dinámica de las burbujas. El Apartado 3 presenta el método numérico desarrollado para llevar a cabo el estudio mencionado anteriormente. El Apartado 4 presenta los resultados obtenidos.

## 2. MODELO FÍSICO-MATEMÁTICO

Consideramos un resonador de longitud  $L$  relleno de líquido con una distribución uniforme de burbujas de gas. Se supone que las burbujas son todas iguales y esféricas. Se usa el mismo sistema diferencial de análisis que en [6], sistema que acopla la presión acústica  $p(x,t)$  con la variación de volumen  $v(x,t) = V(x,t) - v_{0g}$  experimentada por las burbujas con respecto a su volumen inicial  $v_{0g}$ .  $x$  es la coordenada espacial,  $t$  es el tiempo y  $T_t$  es el tiempo total que dura el experimento. Las ecuaciones que rigen este fenómeno son las ecuaciones de ondas y la ecuación de Rayleigh-Plesset [4,6]:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c_{0l}^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\rho_{0l} N_g \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad x \in ]0, L[, \quad t \in ]0, T_t[, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \delta \omega_{0g} \frac{\partial v}{\partial t} + \omega_{0g}^2 v + \eta p = a v^2 + b \left( 2v \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right), \quad x \in ]0, L[, \quad t \in ]0, T_t[, \quad (2)$$

donde  $c_{0l}$  es la velocidad del sonido en el líquido,  $\rho_{0l}$  es la densidad del líquido en el estado de equilibrio y  $N_g$  es la densidad de burbujas.  $\omega_{0g} = \sqrt{3\gamma_g \rho_{0g} / \rho_{0g} R_{0g}^2}$  es la frecuencia de resonancia de las burbujas,  $R_{0g}$  es su radio inicial,  $\rho_{0g} = \rho_{0g} c_{0g}^2 / \gamma_g$  es la presión atmosférica del gas,  $\gamma_g$  es la razón de los coeficientes específicos del gas,  $\rho_{0g}$  es la densidad del gas en equilibrio y  $c_{0g}$  es la velocidad del sonido en el gas.  $\delta = 4\nu_l / (\omega_{0g} R_{0g}^2)$  es el coeficiente de viscosidad, donde  $\nu_l$  es la viscosidad cinemática del líquido.  $\eta = 4\pi R_{0g} / \rho_{0l}$ ,  $a = (\gamma_g + 1)\omega_{0g}^2 / 2v_{0g}$  y  $b = 1/6v_{0g}$ . Se usan las siguientes condiciones iniciales y de contorno:

$$p(x \neq 0, 0) = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t}(x \neq 0, 0) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x \in [0, L], \quad (3)$$

$$p(0,t) = p_0 \sin(\omega_t t), \quad p(L,0) = 0, \quad t \in [0, T_t], \quad (4)$$

que traducen el hecho de que no existe ninguna perturbación acústica en el estado inicial, que el sistema se excita en  $x = 0$  mediante una fuente continua de amplitud  $p_0$  a la frecuencia  $\omega_t = 2\pi f$ , y que el reflector se considera libre.

### 3. MODELO NUMÉRICO

Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas usamos una combinación del método de los volúmenes finitos en espacio y del método de las diferencias finitas en tiempo. El método de los volúmenes finitos es un método numérico de resolución de ecuaciones diferenciales que consiste en hacer una partición del dominio mediante volúmenes finitos de tamaño  $h$  e integrar las ecuaciones diferenciales en ellos [9,10]. Se denota cada una de esas particiones espaciales por el subíndice  $i$ . Se supone que en cada partición las magnitudes se mantienen constantes y que existe una relación lineal con los volúmenes colindantes. El método de las diferencias finitas es un método numérico de resolución de ecuaciones diferenciales que consiste en aproximar las derivadas presentes en las ecuaciones diferenciales por diferencias finitas en un conjunto de puntos creados en el dominio y separados por el paso de discretización  $\tau$  [9-11]. Se denota cada uno de esos puntos temporales por el subíndice  $j$ . Tras la aplicación del método descrito anteriormente a la Eq. (1) se obtiene

$$\begin{aligned} \tau^2 p_{i+1,j} + 2\left(\frac{h^2}{c_{oi}^2} - \tau^2\right) p_{i,j} + \tau^2 p_{i-1,j} - \frac{h^2}{c_{oi}^2} p_{i,j+1} - \frac{h^2}{c_{oi}^2} p_{i,j-1} \\ + \rho_{0i} N_g h^2 (v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

En cuanto a la Eq. (2), se obtiene

$$\begin{aligned} v_{i,j+1} + \left(2 + \delta\omega_{0g}\tau + \omega_{0g}^2\tau^2\right) v_{i,j} - \delta\omega_{0g}\tau v_{i,j-1} + \eta\tau^2 p_{i,j} - a\tau^2 v_{i,j}^2 \\ - b\left(2v_{i,j}\left(v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}\right) + \left(v_{i,j}^2 + v_{i,j-1}^2 - 2v_{i,j}v_{i,j-1}\right)\right) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Teniendo en cuenta las particularidades de estas ecuaciones en los volúmenes finitos extremos, las discretizaciones en ambas coordenadas permiten obtener un sistema de ecuaciones algebraicas que se resuelve para obtener las aproximaciones de presión acústica y variación de volumen.

### 4. RESULTADOS

Se usan los siguientes parámetros:  $c_{oi} = 1500$  m/s,  $c_{og} = 340$  m/s,  $\rho_{oi} = 1000$  kg/m<sup>3</sup>,  $\rho_{og} = 1,29$  kg/m<sup>3</sup>,  $R_{og} = 4,5 \times 10^{-6}$  m,  $N_g = 2 \times 10^{11}$  m<sup>-3</sup>,  $\gamma_g = 1,4$ , y  $\nu_l = 1,43 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s. Se fija la frecuencia en la fuente en  $f = 200$  kHz. Se usan los mismos valores que en [6] para comparar los resultados. Se fija la longitud del resonador en  $L = \lambda_{tbl1} / 4$ , siendo  $\lambda_{tbl1} = c_{tbl1} / f$  donde  $c_{tbl1}$  es la velocidad del sonido a la frecuencia  $f$  en el medio líquido-burbujas obtenida con los valores de los parámetros indicados anteriormente. Esta velocidad, al ser el medio líquido con burbujas dispersivo, depende de la frecuencia de excitación; en este caso vale  $c_{tbl1} = 1002,17$  m/s. Se fija el tiempo total del experimento en  $T_t = 200T$ , siendo  $T = 1/f$ . Se fijan 160 puntos por periodo de tiempo, lo que corresponde a un paso de discretización temporal de  $\tau = 3,125 \times 10^{-8}$  s, y 20 volúmenes finitos en la longitud del resonador, lo que corresponde a un tamaño de volumen finito de  $h = 6,264 \times 10^{-5}$  m. Estos valores permiten obtener resultados estables en la fase estacionaria de la onda.

Se muestra en la Fig. 1 la onda (presión acústica) en régimen lineal ( $p_0 = 100 \text{ Pa}$ ) para un periodo: a) en función de  $x$  y de  $t$ ; b) en función de  $x$  (perfil de la Fig. 1.a); c) planta de la Fig. 1.a donde los tonos rojos representan las altas presiones y los azules las bajas presiones (en función de  $x$  y de  $t$ ). Se observa claramente el comportamiento lineal de la onda estacionaria generada en el resonador, con formas de onda sinusoidales.

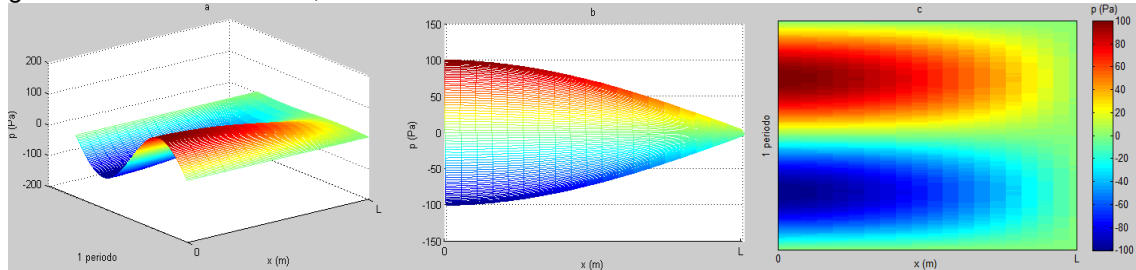


Fig. 1. Presión acústica en régimen lineal. a) en función de  $x$  y de  $t$ ; b) en función de  $x$  (perfil de la onda); c) en función de  $x$  y de  $t$  (planta de la onda).

Las figuras siguientes muestran los resultados de la comparación en un periodo entre el régimen lineal ( $p_0 = 100 \text{ Pa}$ ) y el régimen no lineal ( $p_0 = 25 \text{ kPa}$ ). Se aprecian claramente los efectos no lineales en el medio líquido con burbujas generados cuando sube la amplitud en la fuente, en total coherencia con la teoría no lineal (nótese que los resultados se deben a la combinación de la no linealidad y de la dispersión.) [4,6], lo que sugiere un buen comportamiento de la herramienta numérica presentada aquí.

- En la Fig. 2 se representa la presión acústica en función de  $x$ . Se ve claramente como aparecen deformaciones y asimetrías debido a la no linealidad del medio. Se observa como en el régimen no lineal el contorno de la zona de las bajas presiones se deforma, hasta parecer casi recto, mientras que el contorno de la zona de las altas presiones adquiere una forma cuasi-parabólica y aumenta cerca de la fuente.

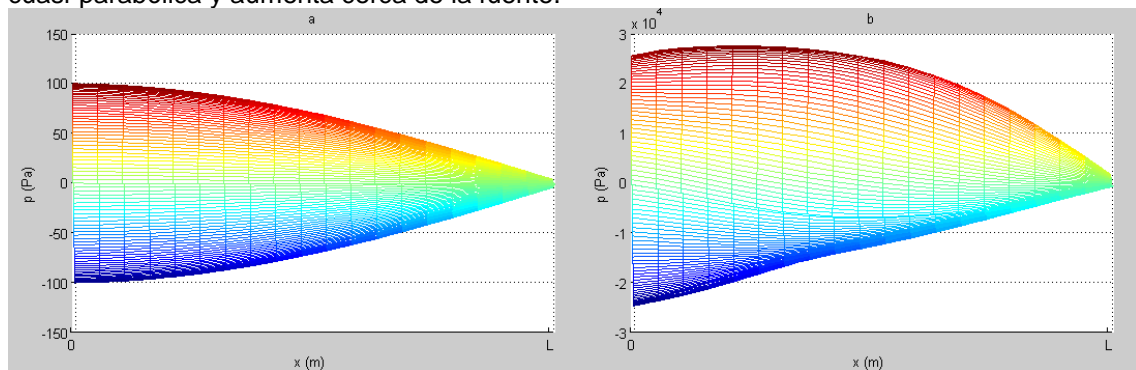


Fig. 2. Presión acústica en función de  $x$  (perfil de la onda). a) régimen lineal; b) régimen no lineal.

- La Fig. 3 representa la presión acústica en función de  $x$  y de  $t$ . Debido a la no linealidad del medio, aparecen zonas menos pronunciadas de bajas presiones que de altas presiones. Se observa también en los diagramas expuestos un buen acuerdo con los resultados de la Ref. [6], lo que valida el método desarrollado aquí.

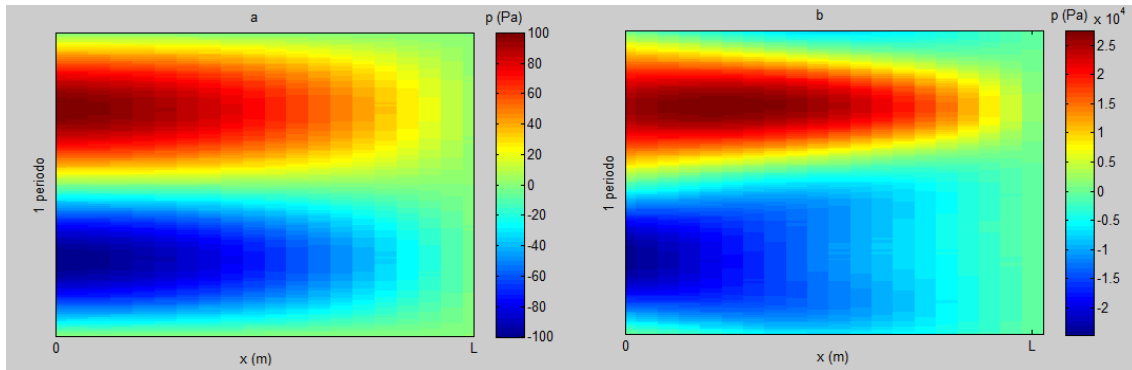


Fig. 3. Presión acústica en función de  $x$  y de  $t$ . a) régimen lineal; b) régimen no lineal.

- La Fig. 4 representa la señal ultrasónica en el punto  $x = L/2$  en el dominio de las frecuencias, obtenida mediante la aplicación de un análisis de Fourier (FFT). Se observa en el régimen lineal que sólo aparece la frecuencia fundamental de excitación  $f = 200000$  Hz mientras que en el régimen no lineal se observan claramente nuevas frecuencias que son los armónicos de la frecuencia  $f$  (múltiplos  $2f$ ,  $3f$  ...). La aparición de frecuencias múltiplos de la frecuencia fundamental se debe a la no linealidad del medio líquido con burbujas [4].

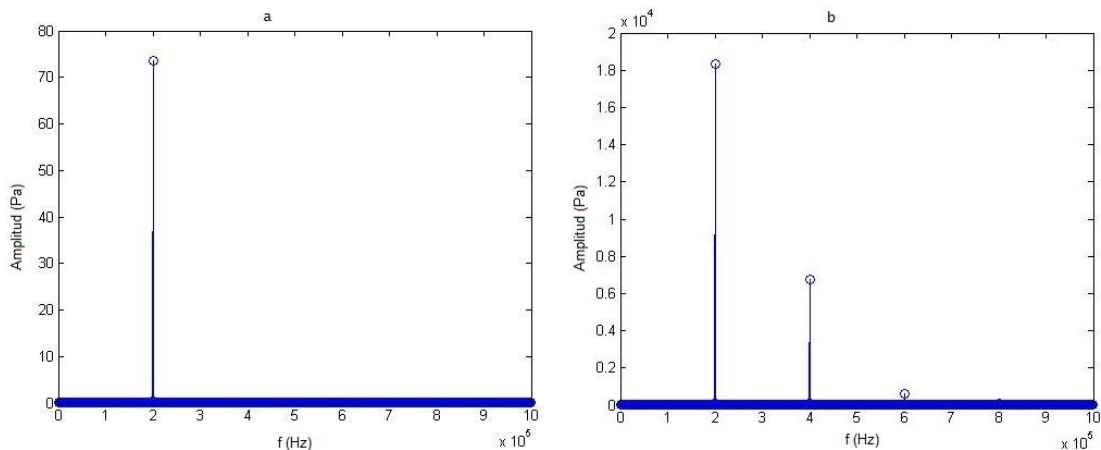


Fig. 4. Presión acústica en el punto  $x = L/2$  en el dominio de las frecuencias. a) régimen lineal; b) régimen no lineal.

## REFERENCIAS

- [1] F.R. Young, Cavitation, McGraw-Hill, London (1989).
- [2] J. Wu, W.L. Nyborg (Eds.), Emerging therapeutic ultrasound, World Scientific (2006).
- [3] T.J. Mason, J.P. Lorimer, Applied sonochemistry: the uses of power ultrasound in chemistry and processing, Wiley-VCH, Weinheim (2002).
- [4] M.F. Hamilton, D.T. Blackstock (Eds.), Nonlinear Acoustics, Academic Press, San Diego (1998).
- [5] K.W. Commander, A. Prosperetti, Linear pressure waves in bubbly liquids: comparison between theory and experiments, J. Acoust. Soc. Am. 85 (1989) 732–746.
- [6] C. Vanhille, C. Campos-Pozuelo, Numerical simulation of nonlinear ultrasonic standing waves in bubbly liquid, Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 10 (2009) 751-757.
- [7] C. Vanhille, C. Campos-Pozuelo, Nonlinear ultrasonic standing waves: two-dimensional simulations in bubbly liquids, Ultrason. Sonochem. 18 (2011) 679-682.
- [8] C. Vanhille, C. Campos-Pozuelo, Numerical simulations of three-dimensional nonlinear acoustic waves in bubbly liquids, Ultrason. Sonochem. 20 (2013) 963-969.
- [9] C. Vanhille, A. Lavie, C. Campos-Pozuelo, Modélisation numérique en mécanique: introduction et mise en pratique, Hermes Science Publications - Lavoisier, Paris (2007).



**45º CONGRESO ESPAÑOL DE ACÚSTICA  
8º CONGRESO IBÉRICO DE ACÚSTICA  
EUROPEAN SYMPOSIUM ON SMART CITIES AND  
ENVIRONMENTAL ACOUSTICS**

- [10] C. Vanhille, C. Campos Pozuelo, C. Conde, A composed numerical model applied to high amplitude ultrasonic resonators, *Acta Acustica / Acustica* 90 (2004) 376-379.
- [11] R.L. Burden, J.D. Faires, *Análisis numérico*, International Thomson Editores, Madrid (1998).