



VI Congreso Iberoamericano de Acústica - FIA 2008
Buenos Aires, 5, 6 y 7 de noviembre de 2008

FIA2008-A111

Diseño e implementación de un sistema de medición de FRF y aplicación en análisis modal de vibraciones

Roberto Pereira ^(a),
Jorge Arenas ^(b).

(a) Instituto de Acústica, Facultad de Ciencias de la Ingeniería, Universidad Austral de Chile, Campus Miraflores, Casilla 567, Valdivia,. E-mail: Robertopereiratorres@yahoo.com,

(b) Instituto de Acústica, Facultad de Ciencias de la Ingeniería, Universidad Austral de Chile, Campus Miraflores, Casilla 567, Valdivia,. E-mail: jparenas@uach.cl, Chile

Abstract

This work presents the design and implementation of a Frequency Response Function (FRF) multichannel measurement system, focused on the vibration modal analysis, by using the available instrumentation of the Institute of Acoustics of the Universidad Austral de Chile. The work consists on constituting the necessary connections for the correct flow and analogical processing of the electric signals measured by piezoelectric sensors, as well as the programming of a signal processing software in LabView 6i that offers diverse types of utilities to the user. FRF measurements were done over a free – clamped bar and over a completely free square plate in order to get the vibration mode shapes of both structures by using the peak extraction method. In the bar case, evident correspondence exists between the experimental results and the theoretical predictions. No correspondence is observed between the theoretical model and the results obtained from the measured FRF for the plate. The natural frequencies and mode shapes obtained were different from the indicated in the references. The main reason for this disparity is considered to be the difference between the set up used in the reference and the set up presented in this work.

Resumen

El presente trabajo contiene una descripción del diseño e implementación de un sistema multicanal de medición de funciones de respuesta de frecuencia (FRF) utilizando la instrumentación disponible en el Instituto de Acústica de la Universidad Austral de Chile. Se presenta el diagrama de conexiones utilizado para el correcto flujo de las señales eléctricas además del software programado en LabView 6i para el procesamiento digital de señales y cálculo de las FRF. Utilizando el sistema diseñado se realizaron pruebas de análisis modal experimental sobre una barra empotrada libre y sobre una placa libre en sus cuatro bordes. A partir de las FRF obtenidas se detectaron las correspondientes frecuencias de resonancia y mediante la aplicación del método de extracción de peaks se reconstruyeron gráficamente los primeros modos de vibración de ambos cuerpos. En el caso de la barra, se verifica evidente semejanza entre las predicciones teóricas y los resultados obtenidos a partir de mediciones. En el caso de la placa, no se observa correspondencia entre las predicciones propuestas en las referencias y los resultados obtenidos a partir de mediciones. Se considera como principal causa de esta disparidad a las diferencias entre el tipo de montaje utilizado en la referencia y el montaje utilizado en este trabajo.

1 Introducción

En el ámbito del diseño y en el control de ruido y vibraciones es fundamental el conocimiento de las frecuencias naturales y modos de vibración propias del sistema bajo análisis. Cualquier cuerpo sometido a vibraciones mecánicas puede resultar dañado por éstas si no ha sido correctamente diseñado, además de presentar serias deficiencias en su desempeño.

El análisis modal experimental se basa en la medición de funciones de respuesta de frecuencia (FRF) y permite mediante diversos métodos, determinar el valor de los parámetros modales de un sistema.

El diseño e implementación de un sistema de medición de FRF permitirá obtener información clave sobre la respuesta de un cuerpo cuando es sometido a fuerzas, bajo diversas condiciones operacionales. A la vez, el sistema planteado permitirá realizar la validación de diversos modelos analíticos predictivos y podrá ser utilizado en la realización de variadas actividades pedagógicas dentro del Instituto de Acústica de la Universidad Austral de Chile.

2 Implementación de sistema de medición de FRF y aplicación en análisis modal de vibraciones

2.1 FRF en sistemas de múltiples grados de libertad

El comportamiento vibratorio de un sistema de N grados de libertad (MDOF), observable, con comportamiento lineal, invariante en el tiempo y que satisface la Ley de Reciprocidad de Maxwell [1], puede representarse mediante el sistema de N ecuaciones diferenciales

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\}, \quad (1)$$

donde $[M]$, $[C]$ y $[K]$ son matrices de orden $N \times N$ llamadas matrices de masa, amortiguamiento y rigidez respectivamente, $\{f(t)\}$ representa la fuerza aplicada y los vectores $\{\ddot{x}(t)\}$, $\{\dot{x}(t)\}$ y $\{x(t)\}$ corresponden a la aceleración, velocidad y desplazamiento del sistema. A partir de la ecuación diferencial homogénea asociada a la ecuación (1) pueden determinarse los valores y vectores propios del sistema, agrupados en pares conjugados:

$$\left. \begin{array}{l} s_r, s_r^* \\ \{\psi\}_r, \{\psi\}_r^* \end{array} \right\} r = 1, \dots, N, \quad (2)$$

Cada modo natural de vibración presente en una estructura de N grados de libertad presenta el mismo comportamiento de un sistema masa-resorte-amortiguador de un grado de libertad, es decir, poseen una determinada frecuencia modal, amortiguamiento modal y un correspondiente patrón típico de deformación llamado forma de modo [4]. Cualquier deformación $\{x(t)\}$ producida en la estructura debido a la aplicación de una fuerza $\{f(t)\}$, puede representarse por medio de una combinación lineal de las correspondientes formas de modo $\{\psi\}_r$ ($r = 1, \dots, 2N$) del sistema [2,3].

El comportamiento de los sistemas vibratorios puede modelarse a partir de la relación existente entre la fuerza de excitación y la respuesta provocada (desplazamiento, velocidad o

aceleración) [2]. En el dominio de la frecuencia, la relación $H(w)$, llamada función de respuesta de frecuencia (FRF), corresponde a la razón existente entre la excitación y la respuesta del sistema

$$H(w) = \frac{X(w)}{F(w)} \tag{3}$$

En el caso de la estructura modelada mediante la ecuación (1), la función de transferencia $[H(jw)]$ que relaciona en el dominio de la frecuencia la excitación total $\{f(t)\}$ aplicada sobre la estructura con la respuesta total del sistema $\{x(t)\}$, corresponde a una matriz de dimensiones $N \times N$ dada por la ecuación (4) [2]:

$$[H(jw)] = \frac{\{X(jw)\}}{\{F(jw)\}} = \sum_{r=1}^N \left[\frac{\{\psi_r\}\{\psi_r\}^T}{a_r(jw + w_r\xi_r - jw_r\sqrt{1-\xi_r^2})} + \frac{\{\psi_r^*\}\{\psi_r^*\}^T}{a_r(jw + w_r\xi_r - jw_r\sqrt{1-\xi_r^2})} \right], \tag{4}$$

en donde w_r , ξ_r y a_r representan la frecuencia natural, factor de amortiguamiento crítico y masa asociados al correspondiente modo r . El elemento [2]

$$[H(jw)]_{jk} = h_{jk}(w) = \frac{\{X(jw)\}_j}{\{F(jw)\}_k} = \sum_{r=1}^n \frac{[\psi]_{jr}[\psi]_{kr}(1-\beta_r^2) - 2j\beta_r\xi_r}{w_r^2 a_r ((1-\beta_r^2)^2 + 4\beta_r^2\xi_r^2)} \tag{5}$$

de la función de transferencia, corresponde a la FRF que relaciona el espectro de una fuerza aplicada en el grado de libertad k con la respuesta producida en el grado de libertad j .

2.2 Esquema general del sistema de medición de FRF

El trabajo de diseño se basa en las propuestas dadas en la referencia [2]. La figura 1 representa esquemáticamente el flujo de datos y los componentes del sistema de medición implementado:

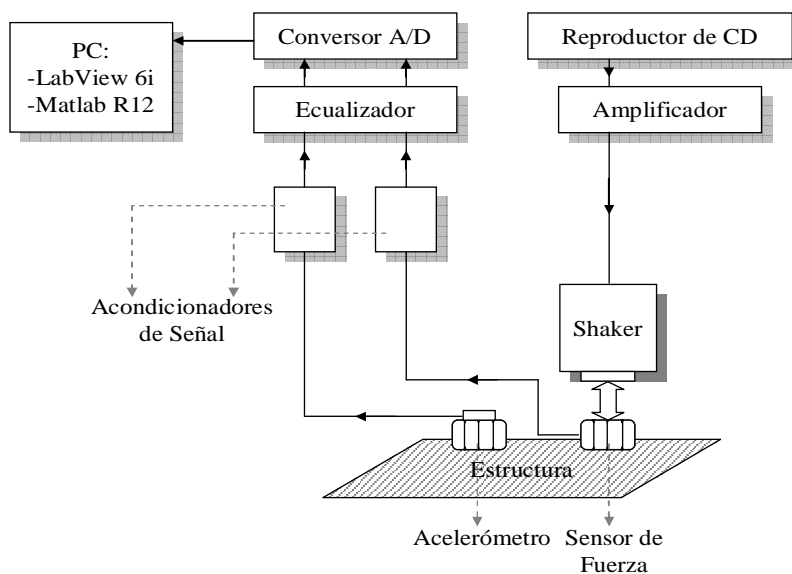


Figura 1. Esquema general del sistema de medición.

El siguiente es el equipamiento utilizado para la implementación del sistema de medición de FRF:

- Acelerómetros PCB Piezotronics 352C67 y 352C22.
- Sensor de fuerza PCB Piezotronics 209C01 .
- Acondicionadores de señal PCB Piezotronics 480C02 .
- Shaker Bruel & Kjaer 4810.
- Front End NI BNC-2090.
- Convertor A/D NI PCI-6036E.
- Amplificador Samson Servo 260.
- Ecuilizador Behringer Ultragraph Pro, modelo FBQ 6200.
- Reproductor American Audio MCD-110.
- Software LabView 6i.
- Software Matlab R12.

2.3 Estructura del software de procesamiento digital de datos y cálculo de FRF

El software para el procesamiento digital de datos ha sido realizado en LabView 6i. LabView ofrece un método de programación gráfico diseñado especialmente para la adquisición y procesamiento de datos obtenidos mediante mediciones. Este lenguaje ofrece además paquetes de funciones prediseñadas llamadas 'Sub VI's' (Sub Virtual Instruments), que pueden ser directamente utilizadas por el programador. La figura 2 es un diagrama de flujo resumido del software realizado.

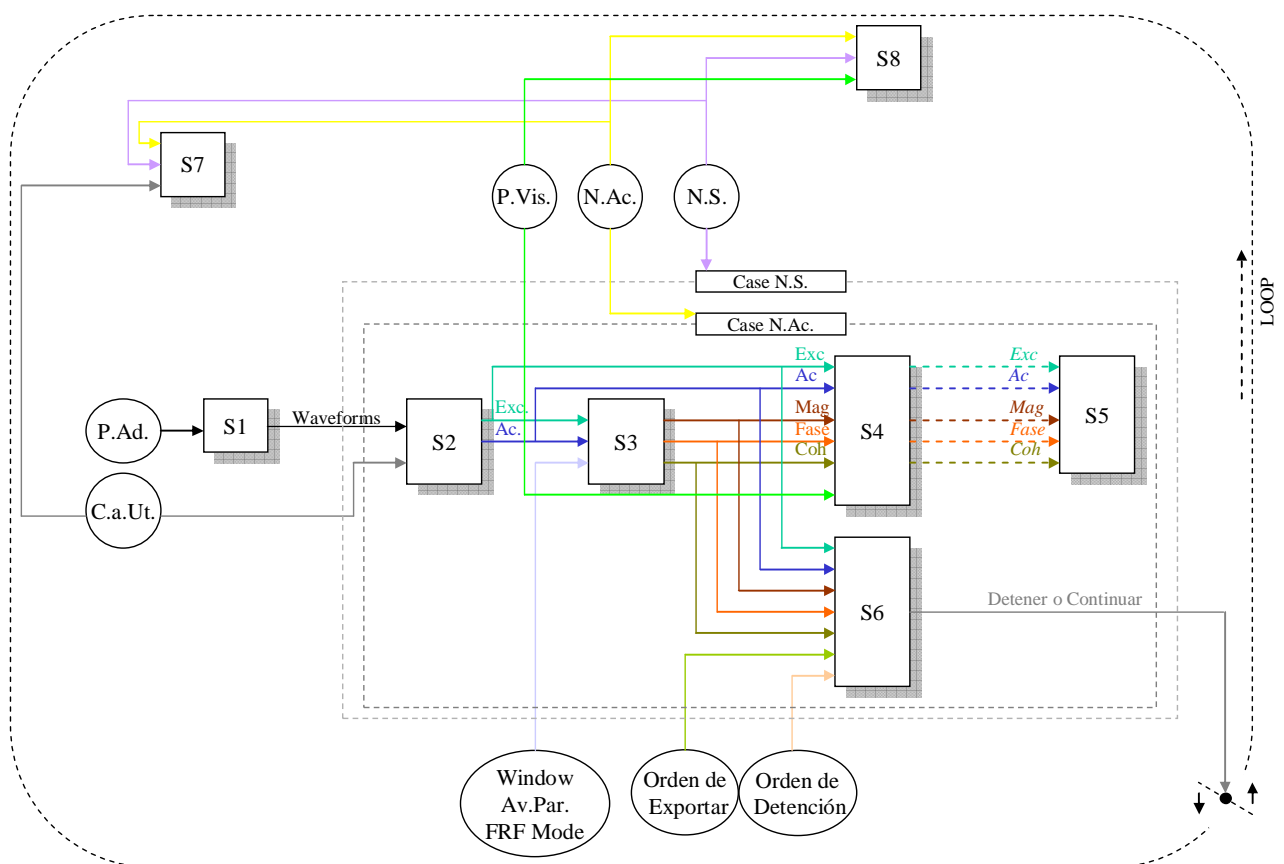


Figura 2. Diagrama de flujo general del software.

Los círculos presentados en la figura 2 corresponden a distintos parámetros de utilizados para el cálculo de las FRF y para la visualización de gráficos en la interfaz diseñada. El usuario seleccionará estos parámetros antes o durante la medición según lo requiera. Las variables controladas por el usuario corresponden a:

- Parámetros de adquisición (P.Ad.): Selecciona la tarjeta de adquisición de datos y el número de canales a utilizar, número de muestras por canal y frecuencia de muestreo
- Canales a utilizar (C.a.Ut): Asigna un canal de entrada específico de la tarjeta de adquisición de datos a la señal proveniente de un determinado sensor.
- Parámetros de visualización: Selecciona el tipo de visualización de forma de onda proveniente de un sensor específico. Permite visualizar la FRF en términos de su magnitud y fase o de su parte imaginaria y parte real.
- Número de acelerómetros (N.Ac): Contiene el número de acelerómetros a utilizar, con un número de 7 sensores.
- Número de sensores de fuerza (N.S): Contiene el número de sensores de fuerza a utilizar, con un máximo de 2 sensores.
- Ventanas, parámetros de promediación y modo de FRF (*Window, Av.Par., FRF Mode*).
- Orden de exportar: Envía la orden de exportación de FRF y coherencia a Matlab.
- Orden de detención.

Los rectángulos presentados en la figura 2 corresponden a diversas secciones de cálculo en las cuales se incorporan subfunciones específicas de LabView. La utilidad de cada una de estas secciones se describe a continuación:

- Sección 1: Constituye el nexo de comunicación entre el programa y la tarjeta de adquisición de datos.
- Sección 2: Obtiene las formas de ondas correspondientes a cada canal.
- Sección 3: Realiza el cálculo de la FRF y coherencia.
- Sección 4: Selecciona las señales, FRF y coherencia a graficar, además de convertir la FRF a parte real e imaginaria si el usuario así lo requiere para la visualización.
- Sección 5: Grafica las señales determinadas en la sección 4.
- Sección 6: Exporta datos y envía orden de detención o continuación del programa. Esta continuación depende del Loop indicado en la figura 2.
- Sección 7: Detecta posibles fallas en la configuración de los canales.
- Sección 8: Detecta posibles fallas en instrucciones de visualización.

Una de las principales características del algoritmo diseñado, es que permite realizar la medición simultánea de hasta 7 FRF a partir de la excitación en un punto y la medición de aceleración en siete puntos de la estructura.

2.4 Determinación de frecuencias naturales y formas de modo en base a FRF medidas.

Se realizaron mediciones de FRF en una barra de aluminio empotrada – libre en sus extremos y en una placa de aluminio libre en sus cuatro bordes. Luego de analizar las FRF medidas se detectaron las frecuencias naturales de ambas estructuras y mediante la aplicación del método de extracción de peaks [3] se obtuvieron las formas de modo correspondientes a cada frecuencia natural. Los resultados se comparan con predicciones teóricas y resultados experimentales expuestos en [8].

2.4.1 Procedimientos de medición de FRF en barra empotrada - libre

La configuración utilizada para la excitación y medición de la respuesta de la barra se aprecia en la figura 3:

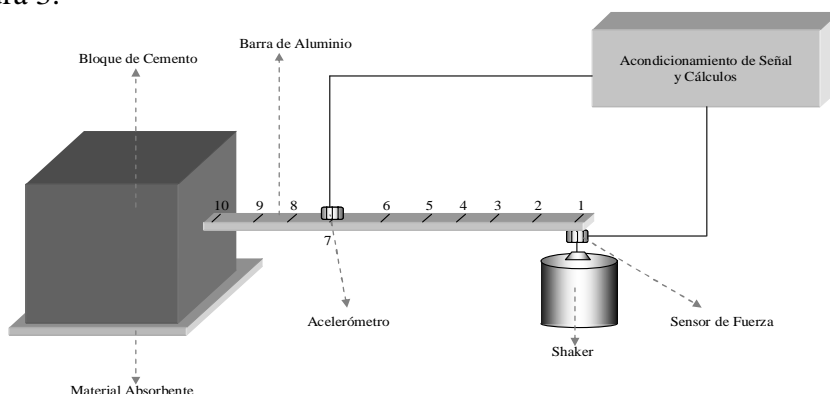


Figura 3. Esquema de configuración experimental utilizado en mediciones a barra.

Las características geométricas y estructurales de la barra se detallan en la tabla 1:

Tabla 1. Características de la barra bajo estudio.

Largo	40 cm	Densidad	2700 Kg/m ³
Ancho	1,905 cm	Masa	61,722 gr
Espesor	0,3 cm	Modulo de Young	72 x 10 ⁹ N/m ²
Volumen	22,86 cm ³	Coficiente de Poisson	0,34

La excitación se realizó en el extremo libre y se realizaron mediciones de aceleración en 10 puntos de la barra.

2.4.2 Procedimientos de medición de FRF a placa libre en sus cuatro bordes

Se construyó una estructura con tubos de acero rellenos con arena para suspender la placa y lograr las condiciones de borde deseadas. Esta se suspendió mediante tiras elásticas en sus dos esquinas superiores. Se realizaron 49 mediciones de FRF sobre la placa, aplicando la fuerza en el punto 40 mediante el shaker suspendido por lienzas de nylon.

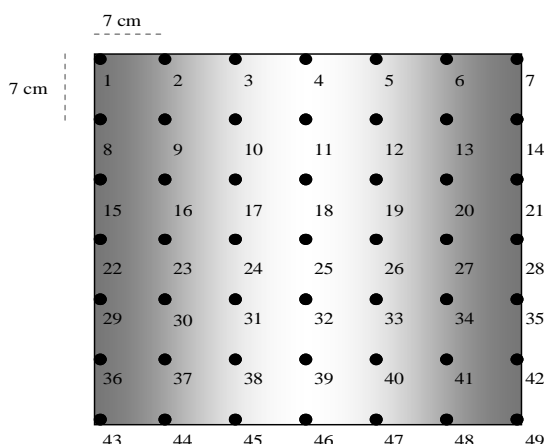


Figura 4. Esquema de puntos de medición utilizados en placa.

La tabla 2 expone las características geométricas y estructurales de la placa utilizada:

Tabla 2. Características de la placa bajo estudio.

Largo	80 cm	Densidad	2700 Kg/m ³
Ancho	80 cm	Masa	3,456 Kg
Espesor	0,2 cm	Modulo de Young	72 x 10 ⁹ N/m ²
Volumen	1280 cm ³	Coficiente de Poisson	0,34

2.4.3 Frecuencias naturales y formas de modo de barra empotrada - libre

Las frecuencias naturales de vibración de una barra empotrada libre se obtienen teóricamente al solucionar la ecuación característica del sistema dado por la ecuación (6) [6]:

$$\cos(kL)\cosh(kL)+1=0, \quad (6)$$

donde k corresponde al número de onda de pliegue y L al largo de la barra. La figura 5 es una superposición de las magnitudes de las 10 FRF medidas en la barra. En el gráfico se distinguen claramente los peaks correspondientes a las frecuencias naturales del sistema:

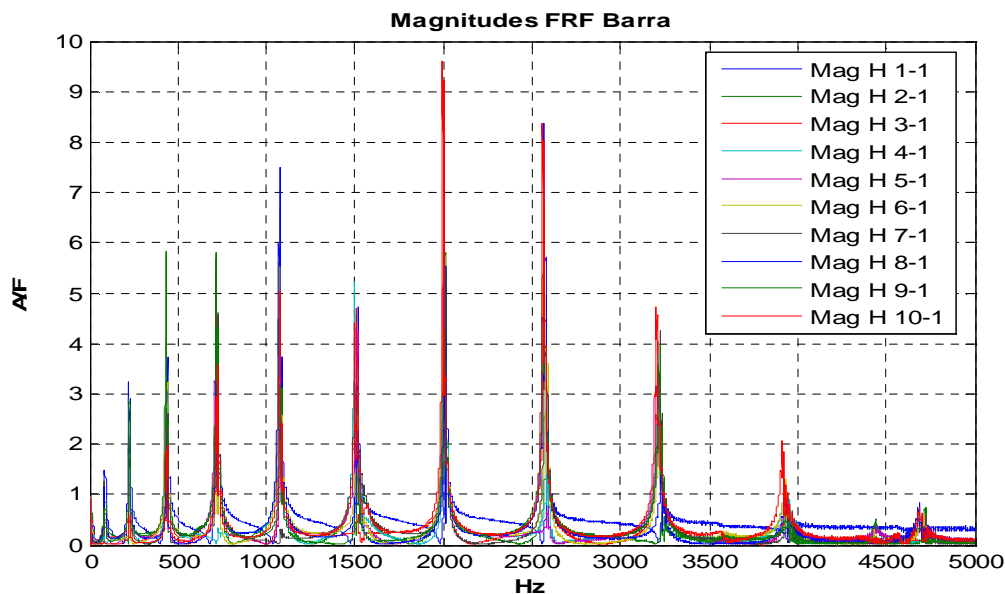


Figura 5. Superposición de magnitudes de las 10 FRF medidas en barra.

La tabla 3 es una comparación entre las primeras 9 soluciones de la ecuación (5) y las frecuencias naturales detectadas mediante mediciones:

Tabla 3. Comparación entre frecuencias naturales de vibración obtenidas teóricamente y mediante mediciones.

	FN 1	FN 2	FN 3	FN 4	FN 5	FN 6	FN 7	FN 8	FN 9
Teoría (Hz)	15	98	274	537	889	1328	1854	2469	3172
Mediciones (Hz)	18	88	227	438	724	1079	1513	2007	2578
Error	21,3%	10,0%	17,2%	18,4%	18,6%	18,7%	18,4%	18,7%	18,7%

Mediante el método de extracción de peaks [3] se han reconstruido las primeras 9 formas de modo de vibración de la barra. Se ha utilizado una interpolación tipo spline cúbico para generar la curva. Los resultados obtenidos de manera práctica se han comparado con el modelo teórico para el modo n determinado por la ecuación (7) [7]:

$$Y_n(x) = C \left\{ \left(\cos(k_n x) - \cosh(k_n x) \right) + \left(\frac{-\cos(k_n L) - \cosh(k_n L)}{\sin(k_n L) + \sinh(k_n L)} \right) (\sin(k_n x) - \sinh(k_n x)) \right\} \quad (7)$$

La figura 6 corresponde a la comparación del segundo modo de vibración de la barra. La línea verde corresponde a la forma de modo obtenida mediante el método de extracción de peaks y la línea roja al calculado usando la ecuación (7):

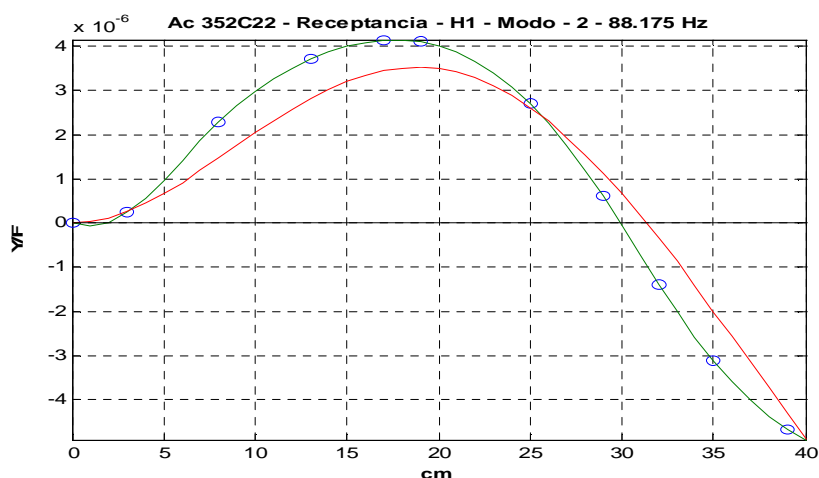


Figura 6. Segundo modo de vibración de barra empotrada libre – 88 Hz.

2.4.4 Frecuencias naturales y formas de modo de placa completamente libre

Las frecuencias naturales de una placa rectangular sometida a diversas condiciones de borde pueden ser calculadas teóricamente mediante la ecuación (8):

$$f_{ij} = \frac{\lambda_{ij}^2}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{Eh^3}{12m''(1-\mu^2)}}; \quad i = 1,2,3,\dots; \quad j = 1,2,3,\dots \quad (8)$$

En el caso de una placa cuadrada y libre en sus cuatro bordes, λ_{ij} adquiere los valores expuestos en la tabla 4 para los primeros cuatro modos de vibración. Estos valores han sido calculados mediante el uso del método de elemento finito [8].

Tabla 5. Valor de parámetro λ_{ij} .

λ_{ij}			
1	2	3	4
13,49	19,79	24,43	35,02

La figura 7 es una superposición de las magnitudes de las 49 FRF medidas sobre la placa. Estas no presentan la nitidez requerida para asegurar a priori que los peaks observados corresponden a frecuencias naturales del sistema.

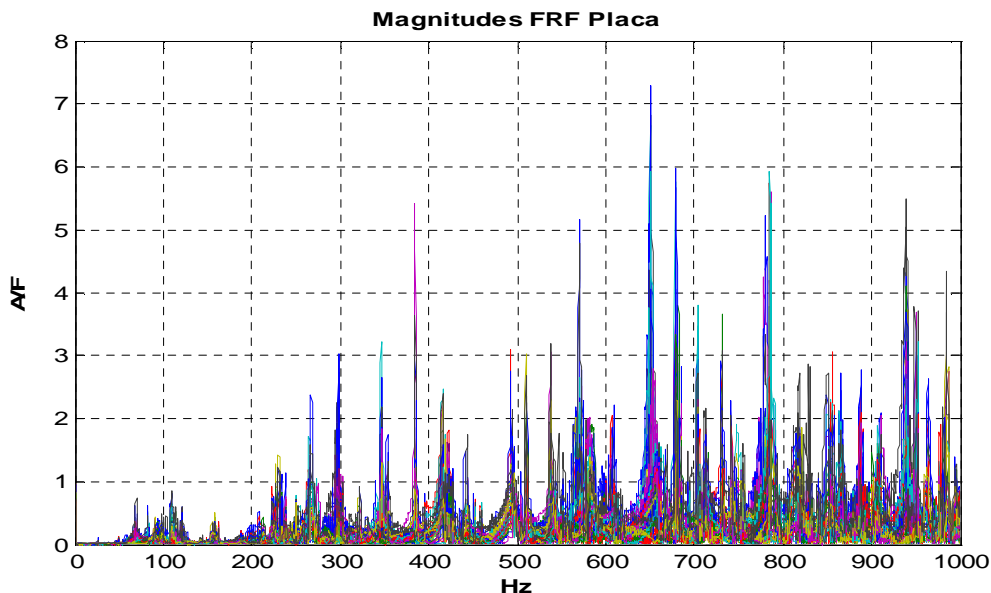


Figura 7. Superposición de magnitudes de las 49 FRF medidas en placa.

Para la determinación de las frecuencias naturales de la placa se han utilizado los criterios de selección expuestos en [3]. Como se observa en la tabla 6, no existe relación alguna entre las frecuencias naturales determinadas utilizando la ecuación (8) y las determinadas por inspección de las 49 FRF medidas. De igual forma, no existe similitud entre las formas de modo presentadas en [8] y las obtenidas en el presente trabajo

Tabla 6. Comparación entre frecuencias naturales obtenidas mediante la ecuación (8) y las obtenidas por inspección directa de las FRF.

	FN 1	FN 2	FN 3	FN 4
Teoría (Hz)	143,5	308,8	470,5	966,9

	FN 1	FN 2	FN 3	FN 4	FN 5	FN 6	FN 7
Mediciones (Hz)	82	121	266	346	354	511	713

Mediante el método de extracción de peaks [3] se han reconstruido las primeras 7 formas de modo de vibración de la placa utilizando una interpolación tipo bicúbica para generar la correspondiente superficie. La figura 8 muestra una representación tridimensional de la forma de modo correspondiente a la frecuencia natural detectada de 713 Hz y también una representación de las correspondientes líneas nodales (color negro) obtenidas graficando el valor absoluto de las deformaciones medidas y variando el contraste de la figura en Matlab.

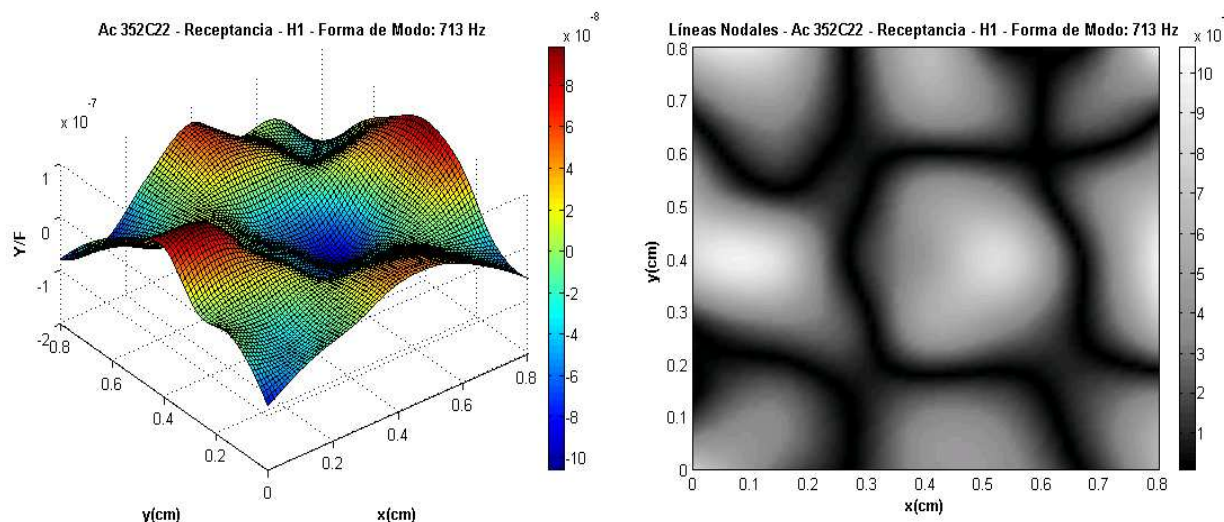


Figura 8. Séptimo modo de vibración de placa libre en sus cuatro bordes – 713 Hz.

3 Conclusiones y Comentarios Finales

Se ha diseñado e implementado exitosamente un sistema multicanal de medición de FRF en base a la instrumentación disponible en el Instituto de Acústica de la Universidad Austral de Chile. Este sistema de medición puede ser perfectamente utilizado tanto para la realización de investigaciones de carácter científico como para actividades pedagógicas.

Mediciones de FRF aplicadas al análisis modal de vibraciones fueron realizadas sobre una barra y sobre una placa. En el caso de la barra existe evidente correspondencia entre las frecuencias naturales obtenidas teóricamente y las observadas en las FRF medidas. Además existe notoria coincidencia entre las formas de modo obtenidas teóricamente con las calculadas mediante el método de extracción de peaks. Tal semejanza no existe en el caso de la placa, en el cual ni las frecuencias naturales ni las formas de modo coinciden con las planteadas en [8]. Las formas de modo presentadas en la referencia fueron obtenidas utilizando una placa de Chladni, restringiendo el movimiento de la placa en su centro, lo que impone una condición de nulo desplazamiento que no se presenta en este trabajo.

Referencias

- [1] Harris, C.M.; Piersol A.G. (2002). “Shock and Vibration Handbook”, McGraw – Hill, New York, Estados Unidos de Norteamérica.
- [2] Ewins, D.J. (1986). “Modal Testing: Theory and Practice”. Research Studies Press LTD. for Brüel & Kjaer, Letchworth, Inglaterra.
- [3] Coleman, R. (2004). “Experimental Structural Dynamics”, AuthorHouse, Bloomington, Estados Unidos de Norteamérica.
- [4] DØssing, O. (1988). “Structural Testing Part 2: Modal Analysis and Simulations”, Brüel & Kjaer Technical Review, Naerum, Dinamarca.
- [5] Gutiérrez, C. (2002). “Investigación del Método de Fracción Racional Polinómica para la extracción de parámetros modales a través de la técnica de impacto”, Universidad Austral de Chile, Valdivia, Chile.
- [6] Cremer, L.; Heckl, M. (1988). “Structure Borne Sound”, Springer-Verlag, Berlín, Alemania.
- [7] Voltera, E.; Zachmanoglou, E. C. (1965). “Dynamics of Vibrations”, Charles E. Merrill Books Inc., Ohio, Estados Unidos de Norteamérica.
- [8] Blevins, R. (2001). “Formulas for Natural Frequency and Mode Shape”, Krieger Publishing Company, Florida, Estados Unidos de Norteamérica.